DISCLAIMER

Diese Zusammenfassung wurde verfasst auf Basis der Vorlesung Analysis 1 & 2 (HS24 & FS25) von Dr. F. Ziltener, einzelne Teile wurden auch aus der Zusammenfassung von Patrick Bölsterli übernommen.
Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in der Zusammenfassung (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe). Die zum pdf zugehörige .tex file ist im zip enthalten, falls jemand die Zusammenfassung anpassen/umschreiben/-verbessern will.
Viel Glück bei der Prüfung :)
Jirayu Ruh, 28. Juli 2025

Analysis 1 & 2

von Jirayu Ruh, Fehler bitte an jirruh@ethz.ch

Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen

Grundlagen

Potenzen und Wurzel

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Die reelle Wurzel ist definiert auf $\mathbb{R}^+$.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
$$b^0 = 1$$

$$b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n}$$
$$b^{-1} = \frac{1}{b^n}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$
$$\sqrt[n]{1} = 1$$

Achtung: Beim Wurzel ziehen, immer $\pm$ vor der Wurzel!

Logarithmus

Der Logarithmus ist definiert auf $\mathbb{R}^+ \setminus 0$. Eigenschaften:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$
$$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$$

$$e^{\log(a)} = a$$
$$\log(e) = 1$$
$$\log(1) = 0$$

Bemerkung: $x = e^n \Leftrightarrow \log(x) = n$

Die Exponentialfunktion ($\exp(x) = e^x$)

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$
$$\exp^{-1}(y) = \log(y)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$
$$e^0 = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Trigonometrische- und Hyperbelfunktionen

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Trigonometrische Funktionen: Wertetabelle

deg/rad	$0°/0$	$30°/\frac{\pi}{6}$	$45°/\frac{\pi}{4}$	$60°/\frac{\pi}{3}$	$90°/\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

deg/rad	$120°/\frac{2\pi}{3}$	$135°/\frac{3\pi}{4}$	$150°/\frac{5\pi}{6}$	$180°/\pi$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Trigonometrische und Hyperbolische Identitäten

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1} \qquad \boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \qquad \boxed{\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}$$

Trigonometrische Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(x)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$
$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x)) \qquad \cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))$$

Hyperbolische Additionstheoreme

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x) = \cos(ix) \qquad \sinh(x) = -i\sin(ix)$$

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \qquad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

Logik

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
F	F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	T

i) Wahre Implikation: $A \Rightarrow B$ ("A ist hinreichend für B").
ii) Wahre Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ ("A gilt genau dann, wenn B gilt").

Negation der Implikation: $\boxed{\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B}$

Kontraposition

Falls $A \Rightarrow B$, so gilt auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ ("B ist notwendig für A").

Indirekter Beweis

Zum Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ genügt es die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen oder die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Widerspruch zu führen. (Modus Ponens)

Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage mit $n \in \mathbb{N}$.

i) Induktions-Verankerung: Zeige, dass $A(0)$ gilt.
ii) Induktions-Annahme: Annahme, dass $A(n)$ gilt.
iii) Induktionsschritt: Beweise, dass $A(n+1)$ gilt unter der Annahme, dass A_n gilt.

Mengenlehre

Notation	Definition
$\{...\}$	Set: Sammlung von ungeordneten Elemente
$(...)$	Tupel: Sammlung von geordneten Elementen
$A \cup B$	Vereinigungsmenge (Durchschnitt)
$A \cap B$	Schnittmenge (Vereinigung)
$A \setminus B$	Differenzmenge (Differenz)
A^C	Komplement, alle Elemente die nicht in A sind
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge (oder gleich) von B
$\emptyset$	Leere Menge

Satz: Karthesisches Produkt

Das Produkt zweier Mengen (*karthesische Produkt*) X und Y kann als eine Menge bestehend aus den Permutationen den Elementen der beiden Mengen dargestellt werden.

Satz: De Morganschen Gesetze

$$\boxed{(A_1 \cup A_2)^C = A_1^c \cap A_2^c} \qquad \boxed{(A_1 \cap A_2)^C = A_1^c \cup A_2^c}$$

Euklidische Norm

Die euklidische Norm $||\cdot||$ ist die Distanz von einem Punkt, z.B. ν zu ihrem Ursprung und wird wie folgt berechnet.

$$||\nu|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

(i) Für die euklidische Norm gilt die Dreiecksungleichung $||x + Y|| \leq ||x|| + ||y||$

Offener und abgeschlossener Ball, Sphäre

Ein Ball oder eine Sphäre ist eine Menge von Punkten in einen n-Dimensionalen Raum, welche einen bestimmten Abstand zum Mittelpunkt des Balles bzw. der Sphäre haben.

1. Der offene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 kleiner als der Radius r ist.
$$B_r(x_0) := B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x - x_0|| < r\}.$$
2. Der abgeschlossene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 kleiner oder gleich dem Radius ist.
$$\bar{B}_r(x_0) := \bar{B}_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x - x_0|| \leq r\}.$$
3. Die Sphäre ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 gleich dem Radius ist.
$$S_r^{n-1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x - x_0|| = r\}.$$

Achtung: Falls $r = 0$ gilt für den Ball

- $B_0(x_0) = \emptyset$ da die euklidische Norm nicht kleiner als 0 sein kann
- $\bar{B}_0(x_0) = \{x_0\}$ da der einzige Punkt dessen Abstand zum Mittelpunkt null ist der Mittelpunkt selbst ist.

Falls $r = \infty$, dann gilt

- $B_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$
- $\bar{B}_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$

Quantoren

Quantor	Beschreibung
$\forall x, A(x)$	Für alle (Allquantor)
$\exists x, A(x)$	Es gibt (Existenzquantor)

Negation: $\boxed{\neg(\forall x) \Leftrightarrow \exists x, \quad \neg(\exists x) \Leftrightarrow \forall x}$

Funktionen (Abbildungen)

Eine Funktion (oder Abbildung) ist ein Tripel

$$f = (X, Y, G),$$

wobei X und Y Mengen sind und $G \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge, sodass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt, sodass $(x, y) \in G$.

Definitionsbereich, Zielbereich

- dom f := dom(f) := Definitionsbereich von f := X Der Definitionsbereich sind die Werte von x, welche für diese Funktion erlaubt sind.
- codom f := codom(f) := Zielbereich von f := Y Der Zielbereich sind die Werte von y, welche für diese Funktion erlaubt sind.

Bild

Das Bild einer Funktion f ist eine Menge, welche die möglichen codom(f) beinhaltet (im(f) $\subseteq$ codom(f)).

$$f(A) := \{f(x) | x \in A\}.$$

Wenn wir die Menge A, welches eine Teilmenge von X ist, auf f verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von Y.

Urbild

Das Urbild einer Funktion f ist eine Menge, welche die möglichen dom(f) beinhaltet ($f^{-1} \subseteq$ dom(f))

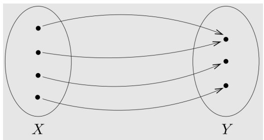
$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Wenn wir die Menge B, welches eine Teilmenge von Y ist, auf die Inverse von f (f^{-1}) verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von X.

Surjektiv

Eine Funktion ist surjektiv, wenn ein Element von Y durch ein Element von X zugeordent ist, d.h.:

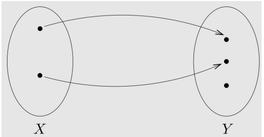
$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$



Injektiv

Eine Funktion ist injektiv, wenn ein Element von X nicht dasselbe Resultat ausgibt, wenn das Element in die Funktion eingesetzt wird, d.h.:

$$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$



Bijektiv und Umkehrfunktion

Eine Funktion ist bijektiv wenn sie injektiv und surjektiv ist, d.h.:

$$(\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \wedge (\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y).$$

Die Umkehrfunktion oder Inverse einer Funktion ist eine Funktion, welches das Gegenteil der ursprünglichen Funktion f macht.

$$f^{(-1)} : Y \to X, f^{(-1)}(y) := x.$$

Zahlen und Vektoren

Natürlichen, ganzen, rationale Zahlen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$
Irrationale Zahlen	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
$]a, b[\Leftrightarrow (a, b)$	$:= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

Dedekindschnitte

Eine reelle Zahl (oder Dedekind-Schnitt oder Dedekindscher Schnitt) ist eine Teilmenge $x \subseteq \mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $x \neq \emptyset$

(b) $x \neq \mathbb{Q}$

(c) $\forall r \in x \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in x$

(d) $\forall r \in x \exists s_0 \in x : s_0 < r$

Rechenoperationen

(i) (Ordnung:) Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x \leq y :\leftrightarrow x \supseteq y d.h. y \subseteq x.$$

$$x < y :\leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y.$$

(ii) (Addition:) Wir definieren die Addition reeller Zahlen als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

$$x + y := +(x, y) := r + s | r \in x, s \in y.$$

(iii) (Subtraktion:) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $-x$ als das eindeutige Element von $\mathbb{R}$, sodass

$$x + (-x) = \mathbf{0}.$$

(iv) (Multiplikation:) Wir definieren die Multiplikation reeller Zahlen als die Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \cdot y = \begin{cases} \{rs | r \in x, s \in y\}, & \text{falls } x, y \geq \mathbf{0}. \\ -((-x) \cdot y), & \text{falls } x < \mathbf{0}, y \geq \mathbf{0}. \\ -(x \cdot (-y)), & \text{falls } x \geq 0, y < 0. \\ (-x \cdot (-y)), & \text{falls } x, y < \mathbf{0} \end{cases}.$$

Bernouillische Ungleichung

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, \infty)$ gilt

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx.$$

b-adischer Bruch

Sei $b \leq 2$. Ein b-adischer Bruch ist Abbildung $a : \mathbb{Z} \to \{0, \dots, b-1\}$, oder das Negative einer solchen Abbildung, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$, sodass für jedes $i > k$ gilt $a_i := a(i) = 0$.

(b) Es gibt keine Zahl $i \in \mathbb{Z}$, sodass für jedes $i \leq l$ gilt $a_i = b - 1$.

Ordnung b-adischer Brüchen Wir definieren $<_b$ als die strikte lexikographische Ordnung auf $\mathbb{R}_b$. d.h. für $a, a' \in \mathbb{R}_b$ definieren wir

$$a <_b a' :\to \exists n \in \mathbb{Z}(\forall i > n : a_i = a'_i) \wedge a_n < a'_n.$$

Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$

Youngsche Ungleichung

Es seien $x, y, c \in \mathbb{R}$, sodass $c < 0$: $\boxed{2|xy| \leq cx^2 + \frac{y^2}{c}}$

Supremum und Infimum

Schranke, Beschränktheit

Sei $A \subset \mathbb{R}$.

- Eine obere Schranke für A ist eine Zahl $b \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $a \in A$ gilt $a \leq b$.
- A heisst nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine obere Schranke für A gibt.
- Die Begriffe untere Schranke und nach unten beschränkt sind analog definiert.
- A heisst beschrankt genau dann, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Supremum, Infimum

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Wir definieren das Supremum von A als

$$\sup A := \begin{cases} \text{kleinste obere Schranke für } A, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ nicht nach oben beschränkt ist,} \\ -\infty, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Wir definieren das Infimum von A als

$$\inf A := \begin{cases} \text{grösste untere Schranke für } A, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } A \text{ nach unten beschränkt ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ nicht nach oben beschränkt ist,} \\ -\infty, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Maximum, Minimum

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Maximum von A ist ein Element $a \in A$, sodass $a \geq b$, für jedes $b \in A$. Ein Minimum von A ist ein Element $a \in A$, sodass $a \leq b$, für jedes $b \in A$.

Komplexe Zahlen

$\boxed{\mathbb{C} := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}}$ wobei $\boxed{i = \sqrt{-1}}$

Realteil	$\mathrm{Re}(z) = a = \frac{z + \overline{z}}{2}$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) = b = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
Komplexe Konjugation	$\overline{z} = a - ib$ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$
Absolutbetrag	$\lvert z \rvert = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$ $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert$
Phase	$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$

Eulersche Formel und Eulers Identität

$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$ $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ $\boxed{e^{2\pi i} = 1}$

Polarform

In der Polardarstellung $z = |z|e^{i\varphi}$ gelten folgende Rechenregel:

Realteil	$\mathrm{Re}(z) = \cos(\varphi)$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) = \sin(\varphi)$
Komplex Konjugation	$\overline{z} = \lvert z \rvert e^{-i\varphi} = \lvert z \rvert \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = \lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren	$(\lvert z \rvert e^{i\varphi})^n = \lvert z \rvert^n \cdot e^{i(n \cdot \varphi)}$
n-te Wurzel	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\lvert z \rvert} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$, $k = 0, \dots, n-1$

Folgen und Reihen

Grenzwert einer Folge

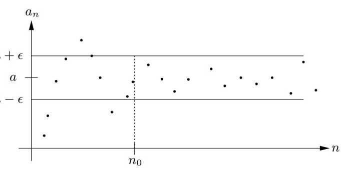
Eine komplexe Zahlenfolge (oder kurz Folge) ist eine Funktion

$$a : \mathbb{N}_N := \{n \in \mathbb{N} | n \leq N\} \to \mathbb{C},$$

wobei $N \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben

$$a_n := a(n), (a_n) := (a_n)_{n \in \mathbb{N}_n} := a.$$

Wir nennen n den Folgenindex und a_n das n-te Folgenglied.
Wenn dies gilt, schreibt man: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a(n \to \infty)$



i) Eine Folge heisst *konvergent*, falls sie einen Grenzwert besitzt.

ii) Besitzt die Folge keinen Grenzwert heisst sie *divergent*.

Monotonie bei Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $n \mapsto a_n$ heisst ..., wenn

monoton wachsend:	$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$
monoton fallend:	$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$
streng monoton wachsend:	$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$
streng monoton fallend:	$a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n$

Konvergenzkriterien

Monotone Konvergenz

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ eine nach oben beschränkte monton wachsende Folge bzw. eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge. Dann gilt

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (A) & \text{falls monoton wachsend} \\ \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (A) & \text{falls monoton fallend} \end{cases}}$$

Satz: Konvergenz enthalten unter Rechenregeln

Seien $A, B \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, die gegen A konvergiert, und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, die gegen B konvergiert. Dann gilt das Folgende:

(i) (Summe) Die Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $A + B$.

(ii) (Produkt) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $A \cdot B$.

(iii) (Quotient) Falls $B \neq 0$ und $b_n \neq 0$, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dann konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $\frac{A}{B}$.

(iv) (Ordnung im Limes enthalten) Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ reelle Folgen sind und dass $a_n \leq b_n$, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $A \leq B$.

Limes superior und inferior, Cauchy-Kriterium

Limes superior und inferior

(i) Wir definieren den Limes superior von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als

$$\limsup_{n \to \infty} a_n := \lim \sup (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := \lim_{n \to \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq n} a_i \in [-\infty, \infty].$$

(ii) Wir definieren den Limes inferior von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als

$$\liminf_{n \to \infty} a_n := \lim \inf (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := \lim_{n \to \infty} \inf_{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq n} a_i \in [-\infty, \infty].$$

Cauchy Folge und Cauchy-Kriterium

Eine komplexe Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heisst Cauchy-Folge genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in (0, \infty) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m, n \in \mathbb{N}_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \epsilon.$$

D. h. eine Folge ist eine Cauchy-Folge, wenn der Abstand der Folgenglieder mit zunehmenden Folgenindex immer kleiner werden.

Konvergenz, Grenzwert einr Folge in $\mathbb{R}^d$

Eine vektorwertige Folge $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ ist *beschränkt*, falls gilt

$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} : ||\mathbf{a}_n|| \leq C}$$

Reihen

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der *Partialsummen* ist

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Man sagt die Reihe ist *konvergent*, falls $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existiert.

Konvergenzkriterien für Reihen

Die Bedingung Nullfolge ($a_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$) ist **notwendig**, aber *nicht* hinreichend für die Konvergenz einer Reihe.

Quotientenkriterium

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $a_k \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \begin{cases} < 1 & S_n \text{ konvergiert absolut,} \\ > 1 & S_n \text{ divergiert} \end{cases}}$$

Achtung: Falls $= 1$, dann ist es unklar ob die Reihe konvergiert oder divergiert.

Wurzelkriterium

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} < 1 & S_n \text{ konvergiert absolut,} \\ > 1 & S_n \text{ divergiert} \end{cases}}$$

Exponentialfunktion (Exponentialreihe)

Wir definieren die (komplexe) Exponentialfunktion als die Funktion

$$\mathrm{Exp} := \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

Potenzreihen

Sei $z \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der folgenden Form nennt man eine Potenzreihe:

$$\boxed{p(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k}$$

Konvergenzbereich, -Radius, -Kreisscheibe

- Der Konvergenzbereich kann man sich wie ein offener Ball vorstellen, der aus komplexen Zahlen, die, wenn in die Potenzreihe eingesetzt, eine komplexe Zahl wieder ausgibt als Lösung d. h.:
$$\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{konvergiert}\right\}.$$
- Der Konvergenzradius ist der Radius vom offenen Ball, welcher den Konvergenzbereich einschliesst.
$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\} \begin{cases} |z| < \rho & \text{konvergiert absolut} \\ |z| = \rho & \text{keine Aussage} \\ |z| > \rho & \text{divergiert} \end{cases}.$$
- Die Konvergenzkreisscheibe ist der offene Ball, welcher den Konvergenzbereich mit den Konvergenzradius einschliesst aber der Konvergenzbereich muss nicht zwingend komplett eingeschlossen sein.
$$B^2_\rho(0).$$

alternierende Folge, alternierende Reihe

Wir nennen die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ alternierend genau dann, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (-1)^k a_k \geq 0 \qquad \text{oder} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0 : (-1)^k a_k \leq 0$$

Satz: Cauchy-Produkt zweier Reihen Seien die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert die Reihe der Produkte absolut mit

$$\boxed{\sum_{n,k=1}^{\infty} a_n b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

unabhängig von der Summationsreihenfolge.

absolut sumierbar, absolute Konvergenz

Wir nennen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar genau dann, wenn die zu $(||a_k||)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} ||a_k||\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.
In diesem Fall nennen wir die zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} ||a_k||\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, absolut konvergent.

Satz: Leibnitzkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle *Nullfolge*. Dass heisst

$$\boxed{a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

Geometrische Reihe

Die Geometrische Reihe ist für $|z| < 1$ konvergent und es gilt:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$$

Wichtige Reihen

Harmonische Reihe:	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$	divergent
Riemann'sche ζ-Funkt.:	$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$	$\begin{cases} 0 < s \leq 1 & \text{divergent} \\ 1 < s & \text{konvergent} \end{cases}$

Wichtige Potenzreihen

Folgende Funktionen besitzen für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergente Potenzreihen:

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sinh(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \cosh(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Potenzreihen konvergieren gleichmässig

Sei eine Potenzreihe $p(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert

$$\boxed{p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k}$$

gleichmässig gegen $p(z)$ auf $B_r(0)$ für jedes $r < p$.

Potenzreihen sind stetig

Potenzreihen sind *stetig* im Inneren ihres Konvergenzradius ρ.

Potenzreihen sind differenzierbar

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist im Inneren ihres Konvergenzradius *gliedweise* differenzierbar. Die Ableitung von $f(x)$ ist

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}}$$

Ausserdem bestizt die Ableitung $f'(x)$ den *gleichen* Konvergenzradius.

Achtung: Oft ist es sinnvoll die Ableitungen der einzelnen Potenzen kurz anzuschauen, damit man die Formel nicht falsch anwendet!

Potenzreihen sind integrierbar

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist innerhalb ihres Konvergenzradius *gliedweise* integrierbar. Das Integral von $f(x)$ ist

$$\boxed{\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}}$$

und die Stammfunktion $F(x)$ besitzt den *gleichen* Konvergenzradius ρ.

Achtung: Oft ist es sinnvoll das Integral mit den einzelnen Potenzen kurz anzuschauen, damit man die Formel nicht falsch anwendet!

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$	$= e$	$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n$	$= e^a$
$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$	$= \log(a)$	$\lim_{n\to 0} \frac{a^n - 1}{n}$	$= \log(a)$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	$= 1$		
$\lim_{t\to\infty} t\sin(\frac{1}{t})$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t}$	$= 1$
$\lim_{t\to\infty} t\log(1+\frac{1}{t})$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t}$	$= 1$
$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2(1-\cos(\frac{1}{t}))}$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{1-\cos(t)}$	$= 2$
$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t\sin(\frac{1}{t})}$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(t)}$	$= 1$
$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}$	$= 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+2t)}{\log(1+t)}$	$= 2$

Tipps Grenzwertberechnung

Verschiedene mögliche Ansätze:

- Bei Grenzwerten, welche eingesetzt $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ geben, L'hopital anwenden!
- Wurzelterme: 3te Binomische Formel versuchen
- Schwieriger $\lim_{n\to 0}(\ldots)$: Taylorformel mit Entwicklungspunkt 0 benutzen (getrennt für Nenner und Zähler anwenden!!!). Dies funktioniert, da die Approximation im Entwicklungspunkt exakt ist.
- Grenzwerten mit vielen Funktionen: So umformen zu versuchen, dass man die Grenzwerte unter 'Wichtige Grenzwerte' verwenden kann!
  - Bei $\lim_{n\to\infty}(\ldots)^n$ muss man fast immer ausschliesslich $e^{n\cdot log(\ldots)}$ als erste Umformung benutzen!

Bernouilli de l'Hôpital

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a,b[$. Sei $g'(x_0) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$ und $f(a) = 0 = g(a)$ oder $f(a) = \pm\infty = g(a)$. Existiert

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x > a$, und es gilt

$$\boxed{\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Existiert $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht, so muss man nochmals l'Hôpital anwenden.

Stetigkeit, Topologie

Stetigkeit

(i) Sei $x_0 \in S$. f heisst an der Stelle x_0 stetig genau dann, wenn
$$\forall \epsilon \in (0,\infty) \exists \delta \in (0,\infty) \forall x \in S : ||x - x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| \leq \epsilon.$$

(ii) f heisst stetig genau dann, wenn an jeder Stelle seines Definitionsbereiches stetig ist.

Topologie, innerer Punkt, Inneres, Offen- und Abgeschlossenheit einer Menge, Rand, Konvergenz einer Funktion an einer Stelle

innerer Punkt, Inneres, Offenheit

(i) Ein Punkt $x \in S$ heisst innerer Punkt von S genau dann, wenn es ein $r \in (0,\infty)$ gibt, sodass
$$B^n_r(x) \subseteq S.$$
Wir definieren Int S, dass Innere von S (oder den offenen Kern von S), als die Menge aller ihrer inneren Punkte,
$$\mathrm{Int}\ S := \mathrm{Int}(S) := S-^\circ := \{\text{innerer Punkt von } S\}.$$

(ii) S heisst offen (in $\mathbb{R}^n$) genau dann, wenn jeder Punkt von S ein innerer Punkt ist.

Vereinigung, Durchschnitt

Sei $\mathcal{S}$ eine Kollektion, also eine Menge von Mengen.

(i) Wir definieren $\bigcup \mathcal{S}$, die Vereinigung von $\mathcal{S}$ (oder Vereinigungsmenge von $\mathcal{S}$ oder Vereinigung aller Elemente von $\mathcal{S}$) als die Menge aller Objekte, die Element (mindestens) eines Elementes von $\mathcal{S}$ sind, d.h.
$$\bigcup \mathcal{S} := \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S := \{x | \exists S \in \mathcal{S} : x \in S\}.$$

(ii) Wir nehmen jetzt an, dass $\mathcal{S}$ nicht leer ist. Wir definieren $\bigcap \mathcal{S}$, den (Durch-)Schnitt von $\mathcal{S}$ (oder Schnittmenge von $\mathcal{S}$ oder Schnitt aller Elemente von $mathcal{S}$) als die Menge aller Objekte, die Element aller Elemente von $\mathcal{S}$ sind, d.h.
$$\bigcap \mathcal{S} := \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S := \{x | \forall S \in \mathcal{S} : x \in S\}.$$

Abgeschlossenheit

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst abgeschlossen (in $\mathbb{R}^n$) genau dann, wenn ihr Komplement $A^c = \mathbb{R}^n$
A offen ist.

Abgechlossene Mengen

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heisst **abgeschlossen**, falls das Komplement $A^C = \mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist.

Der Abschluss

Wir definieren den Abschluss von S als den Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von S.

$$\bar{S} := \mathrm{clos}(S) := \bigcap_{A\subseteq\mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen: } S\subseteq A} A.$$

Rand

Wir definieren ∂S, den (topologischen) Rand von S als das Komplement des Inneren von S im Abschluss von S,

$$\partial S := \bar{S} \setminus \mathrm{Int} S.$$

Konvergenz und Grenzwert einer Funktion ($\epsilon - \delta-$Kriterium)

Wir sagen, dass die Funktion f an der Stelle x_0 gegen y_0 konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in (0,\infty) \exists \delta \in (0,\infty) \forall x \in X : ||x - x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - y_0|| \leq \epsilon.$$

In diesem Fall nennen wir y_0 den Grenzwert von f an der Stelle x_0 und wir schreiben

$$\lim_{x\to x_0} f(x) := \lim_{x_0} f := y_0.$$

Beschränkt

Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heisst beschränkt genau dann, wenn sie in einem abgeschlossenen Ball enthalten ist, der nicht ganz $\mathbb{R}^n$ ist d. h. ein abgeschlossener Ball, der nicht unendlich gross ist.

Kompaktheit

Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heisst kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Topologisches Kriterium für Stetigkeit

relative Offen- und Abgeschlossenheit

(i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst relativ offen in X (oder schlichtweg off in X oder relativ offen) genau dann, wenn es eine offene Teilmenge $\tilde{U}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass $U = \tilde{U} \cap X$.

(ii) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst relativ abgeschlossen in X genau dann, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{A}$ von $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass $A = \tilde{A} \cap X$.

In einfachen Worten: eine Menge kann innerhalb einer Teilmenge nicht offen sein, jedoch innerhalb einer anderen Menge schon. Das gleiche gilt für abgeschlossene Mengen.

Umgebung

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst Umgebung von x_0 realtiv zu X (oder in X) genau dann, wenn es einen offenen Ball um x_0 gibt, dessen Durchschnitt mit X in U enthalten ist, dass heisst es gibt ein $r \in (0, \infty)$, sodass

$$B_r^n(x_0) \cap X \subseteq U.$$

Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir ein solches U auch schlichtweg eine Umgebung von x_0.

Zwischenwertsatz und Folgerungen, Stetigkeit der Umkehrfunktion

Monotonie

Eine Funktion f heisst ..., wenn

monoton wachsend:	$x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
monoton fallend:	$x \geq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
streng monoton wachsend:	$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
streng monoton fallend:	$x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Punktweise Konvergenz

Wir sagen, dass die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ punktweise gegen f konvergiert genau dann, wenn

$$\forall x \in X : (f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0} \to f(x).$$

Gleichmässige Konvergenz

Wir sagen, dass die folge $(f_m)_{m \in \aleph_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert genau dann, wenn

$$\left(\sup ||f_m(x) - f(x)||\right)_{m \in \aleph_0} \to 0.$$

Differenzenquotient, Differenzierbarkeit, Ableitung (in einem Punkt)

(i) Wir definieren den Differenzenquotienten von f zu x_0 als die Funktion

$$Q := Q_{x_0}^f : U\{x_0\} \to \mathbb{R}^p, Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(ii) Wir nennen f im Punkt x_0 differenzierbar genau dann, wenn

$$Q \text{ konvergiert im Punkt } x_0.$$

In diesem Fall definieren wir die Ableitung von f an der Stelle x_0 als den Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x_0} Q = \lim_{x \to x_0} Q(x).$$

(iii) Wir nennen f (auf U) differenzierbar genau dann, wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die Ableitung von f als die Funktion

$$f' : U \to \mathbb{R}^p.$$

Satz

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega \Rightarrow f$ ist stetig in x_0.

Eigenschaften des Differentials

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

Summenregel	$(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$
Produktregel	$(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
Quotientregel	$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$
Kettenregel	$(g(x_0) \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Kettenregel

Falls f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Der Mittelwertsatz

Wir nehmen an, dass f stetig und auf dem offenen Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$, sodass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

verschwindende Ableitung impliziert Konstanz, positive Ableitung strenges Wachstum Sei f stetig und auf dem offenen Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Dann gilt folgendes:

(i) Falls $f' \equiv 0$ auf $]a, b[$, dann ist f konstant.

(ii) Falls $f' \geq 0$ auf $]a, b[$, dann ist f monoton wachsend.

(iii) Falls $f' > 0$ auf $]a, b[$, dann ist f streng monoton wachsend.

Für $\mathbb{R}$: Links- und Rechtsseitiger Grenzwert

Nähert man sich von Links an x_0 an, d.h. $x < x_0$ dann gilt:

$$\boxed{f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$$

Nähert man sich von Rechts an x_0 an, d.h. $x > x_0$ dann gilt:

$$\boxed{f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)}$$

f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

Der Umkehrsatz

Wir nehmen an, dass f' differenzierbar ist und $f' \neq 0$. Dann gilt das Folgende:

(i) Das Bild von f ist durch das offene Intervall J gegeben,

$$\operatorname{im}(f) = J.$$

(ii) Die Funktion $f : I \to J$ ist bijektiv.

(iii) Die Umkehrfunktion $f^{\langle -1 \rangle} = f^{-1} : J \to I$ ist differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \forall y \in J.$$

Höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen

(i) Wir nennen f 0-mal differenzierbar (keine Bedingung). Wir definieren ihre 0-te Ableitung (oder Ableitung 0-ter Ordnung) als

$$f^{(0)} := f.$$

Rekursiv definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$: Die Funktion f heisst k-mal differenzierbar genau dann, wenn sie $(k-1)$-mal differenzierbar ist und ihre $(k-1)$-te Ableitung differenzierbar ist. Wir definieren ihre k-te Ableitung (oder Ableitung k-ter Ordnung) als

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})' : U \to \mathbb{R}^p.$$

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ Wir nennen f k-mal stetig differenzierbar (oder von der Klasse C^k oder schlicht C^k) genau dann, wenn f k-mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist. Wir definieren die Menge

$$C^k(U, \mathbb{R}^p) := C^k(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \to \mathbb{R}^p | f \text{ist } k\text{mal stetig differenzierbar}\}$$

und kürzen ab:

$$C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R}).$$

(iii) Wir nennen f beliebig oft differenzierbar (oder C^∞ oder glatt) genau dann, wenn f k-mal differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die Menge

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^p) := C^\infty(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \to \mathbb{R}^p | f \text{ ist glatt}\}.$$

Taylor Entwicklung

Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ und $x_0 \in I$. Falls $m \geq 0$, dann nehmen wir an, dass f m-mal differenzierbar ist.

(i) Wir definieren das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 (oder um x_0) als die Funktion

$$T_{f,x_0}^m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad T_{f,x_0}^m(x) := \sum_{k=0}^m \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

(ii) Wir definieren das Restglied von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 als die Funktion

$$R_{f,x_0}^m := f - T_{f,x_0}^m : I \to \mathbb{R}.$$

(iii) Falls f glatt ist, dann definieren wir die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt x_0 (oder um x_0) als die Folge der Taylorpolynome

$$T_{f,x_0} := (T_{f,x_0}^m)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe

Die Taylorreihe von f um x_0 konvergiert auf dem Intevall $\bar{B}_r^1(x_0) = [x_0 - r, x_0 + r$ gleichmässig gegen f, d. h.

$$\forall \epsilon \in]0, \infty[\exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \bar{B}_r^1(x_0) : m \geq m_0 \Rightarrow |R_{f,x_0}^m(x) = f(x) - T_{f,x_0}^m(x)| \leq \epsilon.$$

Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform

Wir nehmen an, dass f $(m+1)$-mal differenzierbar ist.

(i) Falls $x_0 < x$, dann gibt es einen Punkt $\zeta \in]x_0, x[$, sodass

$$R_{f,x_0}^m(x) = \frac{f^{m+1}(\zeta)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}.$$

(ii) Falls $x_0 > x$, dann gibt es einen Punkt $\zeta \in]x, x_0[$, sodass $R_{f,x_0}^m(x) = \frac{f^{m+1}(\zeta)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$ gilt.

(strikte) lokale Extremalstelle

Wir nennen x_0 eine lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in U\ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) > f(x_0), \qquad \forall x \in U\ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine lokale Maximalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \forall x \in U\ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Maximalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) < f(x_0), \qquad \forall x \in U\ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Extremalstelle von f genau dann, wenn x_0 eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle ist.

kritischer Punkt

x_0 heisst kritischer (oder stationärer) Punkt von f genau dann, wenn die Ableitung von f in x_0 verschwindet, d. h.

$$f'(x_0) = 0.$$

Integralrechnung auf $\mathbb{R}$

Bestimmtes Riemann-Integral: Definition

Treppenfunktionen

φ heisst Treppenfunktion genau dann, wenn φ eine (endliche) Linearkombination von Indikatorfunktionen von Intervallen ist.

Das bedeutet, dass es eine Zahl gibt $k \in \mathbb{N}_0$, Intervalle $I_1, \ldots, I_k \subseteq I$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \chi I_i.$$

Die Intervalle dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein.

elementares Integral einer Treppenfunktion

Wir definieren das elementare Integral von φ als die Summe

$$S_I \varphi := S_I(\varphi) := \sum_{i=1}^k c_i |I_i|,$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $I_1, \ldots, I_k \subseteq I$ Intervalle und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ Zahlen sind, sodass

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{I_i}.$$

eigentliche Riemann-Integrierbarkeit, eigentliches Riemann-Integral

(i) Wir definieren das untere und das obere (Riemann-)Integral von f (über I) als

$$\underline{\int_I} f := \sup\{S_I \varphi | \varphi : I \to \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion } : \varphi \leq f\},$$

$$\overline{\int_I} f := \inf\{S_I \psi | \psi : I \to \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion } : \psi \geq f\}.$$

(ii) Wir nennen f (eigentlich Riemann)integrierbar (über I) genau dann, wenn

$$\underline{\int_I} f \geq \overline{\int_I} f.$$

In diesem Fall definieren wir das (bestimmte eigentliche Riemann-)Integral von f (über I) als

$$\int_a^b f(x)dx := \int_I f := \underline{\int_I} f.$$

Eigenschaften der Riemann-Integration

(i) (treppenfunktion integrierbar) jede treppenfunktion $\varphi : i \to \setminus$ ist riemann-integrierbar.

(ii) (stetige und beschränkte funktion integrierbar) jede stetige und beschränkte funktion $f : i \to \setminus$ ist riemann-integrierbar.

(iii) jede beschränkte monotone funktion $f : i \to \setminus$ ist riemann-integrierbar.

seien jetzt $f, g : i \to \setminus$ riemann-integrierbar funktionen und $c \in \setminus$.

(iv) (monotonie) falls $f \leq g$, dann gilt

$$\int_i f \leq \int_i g.$$

(v) (linearität) die funktionen cf und $f + g$ sind riemann-integrierbar und

$$\int_i cf = c \int_i i.$$

$$\int_i (f+g) = \int_i f + \int_i g.$$

(vi) (minimum, maximum, absolutbetrag) die funktionen $\min f, g$, $\max f, g$ und $|f|$ sind riemann-integrierbar. es gilt

$$\left| \int_i f \right| \leq \int_i |f|.$$

(vii) (gebietsadditivität) seien $a, b, c \in \setminus$, sodass $a \leq b \leq c$, und $f : [a, c] \to \setminus$. die funktion f ist riemann-integrierbar genau dann, wenn die eingeschränkte funktionen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ riemann-integrierbar sind. in diesem fall gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktion

Stammfunktionen

Eine Stammfunktion für f ist eine differenzierbare Funktion $F : X \to \mathbb{R}$, sodass $F' = f$

Hauptsatz der Differential- und Integralberechnung

(i) (erster Hauptsatz) Seien $c \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Wir definieren

$$\left| \; F : I \to \mathbb{R}, \quad \right| \; F(x) := \int_c^x f. \; \Big|$$

Sei $x \in I$ eine Stetigkeitsstelle von f. Dann ist F an der Stelle x differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = f(x).$$

(ii) (zweiter Hauptsatz = Formel von Newton und Leibnitz) Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung Riemann-integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Partielle Integration

Seien $u, v \in C^1(]a, b[)$, so dass $u(x) \cdot v'(x)$ eine SF besitzt. Dann besitzt $u'(x) \cdot v(x)$ auch eine SF und es gilt

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Wallisches Produkt

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\frac{\pi}{2}$, also

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} c_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots.$$

Substitutionsregel

Seien $f, g \in C^1(]a, b[)$. Dann gilt für $a < x_0 < x_1 < b$:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f'(\underbrace{g(x)}_{=u}) \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{=du} = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(u)du}$$

Intergration und gleichmässiger Limes

Falls die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert, dann konvergiert die Folge der Integrale $\left(\int_I f_m \right)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gegen das Integral $\int_I f$.

Gliedweise Intergration einer Potenzreihe

Es gilt

$$\left| \; \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k-1}) \to \int_a^b f \; \right| \; \text{für } n \to \infty \; \Big|$$

Grenzwertsatz von Abel

Falls die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k r^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, dann gilt

$$\left| \; \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \; \right| \; \text{für } x \nearrow r \; \Big|$$

Uneigentliche Riemann-Integral

(i) Seien $a_- \in \mathbb{R}, a_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sodass $a_- < a_+$, und $f : [a_-, a_+[\to \mathbb{R}$. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn f eingeschränkt auf jedes kompakte Teilintervall von $[a_-, a_+[$ eigentlich Riemann-integrierbar ist und

$$\int_{a_-}^{x_+} f \text{ für } x_+ \nearrow a_+ \text{ konvergiert.}$$

In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f als

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \lim_{x_+ \nearrow a_+} \int_{a_-}^{x_+} f.$$

(ii) Seien $a_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a_+ \in \mathbb{R}$, sodass $a_- < a_+$, und $f :]a_-, a_+] \to \mathbb{R}$. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn f eingeschränkt auf jedes kompakte Teilintervall von $]a_-, a_+]$ eigentlich Riemann-integrierbar ist und

$$\int_{x_-}^{a_+} f \text{ für } x_- \searrow a_- \text{ konvergiert.}$$

In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f als

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \lim_{x_- \searrow a_-} \int_{x_-}^{a_+} f.$$

(iii) Seien $a_-, a_+ \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a_+ \in \mathbb{R}$, sodass $a_- < a_+$, und $f :]a_-, a_+[\to \mathbb{R}$. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn es ein $b \in]a_-, a_+[$ gibt, sodass $f|_{[b, a_+[}$ und $f|_{]a_-, b]}$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f als

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \int_{a_-}^{b} f + \int_{b}^{a_+} f$$

wobei $b \in]a_- a_+[$.

Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen (GDG)

Sei $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und I ein offenes Intervall. (I kann beschränkt oder unbeschränkt sein.) Wir bezeichnen die Variable in $\mathbb{R}$ mit t, verwenden die Notation $\dot{u} = u'$ für die Ableitung einer Funktion u und schreiben $u^{(k)}$ für die k-te Ableitung von u.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDG) der Ordnung n für eine Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form

$$\left| \; \varphi(t, u(t), \dot{u}(t)), \ldots, u^{(n)}(t)) = 0 \; \right| \; \forall t \in I \; \Big|$$

wobei $\varphi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion ist, die nicht bezüglich der letzten Variable konstant ist.

Linearität und Homogenität einer GDG

Wir nennen die GDG für eine reellwertige Funktion linear genau dann, wenn es Funktionen $a_i, f : I \to \mathbb{R}(i = 0, \ldots, n)$ gibt, sodass die GDG nach Verschieben von Termen gegeben ist durch

$$\sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)} = f, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i(t) U^{(i)}(t) = f(t), \quad \forall t \in I$$

Wir nehmen jetzt an, dass die GDG linear ist. Falls die Funktion f konstant gleich 0 ist, dann heisst die GDG homogen, sonst inhomogen. Die Funktion f heisst die Inhomogenität (Quellterm oder Störterm) der GDG.

Superpositionsprinzip

Wenn eine lineare GDG als Lösung zwei oder mehrere Funktionen hat, dann kann man diese zwei Funktionen miteinander addieren. Dies ist dann die endgültige Lösung der GDG.

charakteristisches Polynom

Wir definieren das charakteristische Polynom der GDG als die Funktion

$$p(\lambda) := \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

differenzierbarkeit

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^p$$

eine Funktion und $y_0 \in U$.

Wir nennen g an der Stelle y_0 differenzierbar genau dann, wenn jede Komponente g_i im Punkt y_0 differenzierbar ist (im Sinn der Analysis I). In diesem Fall definieren wir die Ableitung von g im Punkt y_0 als den Vektor

$$g'(y_0) := \begin{pmatrix} g_1'(y_0) \\ \vdots \\ g_p'(y_0) \end{pmatrix}.$$

Partielle Ableitung

Seien nun $n, p \in \mathbb{N}$, U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Das bedeutet, dass f eine vektorwertige Funktion mehrerer Veränderlicher ist. Wir schreiben x^j für die j-te Koordinate eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ und f^i für die i-te Komponente von f. Das bedeutet, dass

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \vdots \\ f^p(x^1, \ldots x^n) \end{pmatrix}, \quad \forall x \in U.$$

Sei $x_0 \in U$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Wir nennen f an der Stelle x_0 partiell nach der j-ten Variable x^j differenzierbar genau dann, wenn die Funktion

$$g(y) := f(x_0^1, \ldots, x_0^{j-1}, y, x_0^{j+1}, \ldots, x_0^n)$$

im Punkt $y = x_0^j$ differenzierbar ist. In diesem Fall defenieren wir die partielle Ableitung von f nach der j-ten Variable im Punkt x_0 als die Ableitung von g im Punkt x_0^j. Wir schreiben diese partielle Ableitung als

$$f_{x^j}(x_0) := D_j f(x_0) := \partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) := g'(x_0^j) \in \mathbb{R}^p.$$

Wir sagen, dass f im Punkt x_0 partiell differenzierbar ist genau dann, wenn f im Punkt x_0 nach jeder Variablen partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die Jacobi-Matrix von f im Punkt x_0 als die Matrix

$$J_f(x_0) := (f_{x^1} \cdots f_{x^n}(x_0)) = \begin{pmatrix} f_{x^1}^1(x_0) & \cdots & f_{x^n}^1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x^1}^p(x_0) & \cdots & f_{x^n}^p(x_0) \end{pmatrix}.$$

Wir nennen f partiell differenzierbar genau dann, wenn f in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung von f nach der j-ten Variable als die Abbildung

$$f_{x^j} : U \to \mathbb{R}^p.$$

(totale) Ableitung

Wir nennen f and der Stelle x_0 (total) differenzierbar genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ gibt, sodass

$$g(x) := \frac{||f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)||}{||x - x_0||} \to 0 \quad \text{für } x \to x_0.$$

Wir nennen f (total) differenzierbar genau dann, wenn f an der Stelle in U differenzierbar ist.

Ableitung von Summe, Produkt, Quotient

Wir nehmen an, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Es gilt:

(i) Die Summe $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

(ii) (Leibnizregel) Das Skalarprodukt $f \cdot g = \sum_{i=1}^{p} f^i g^i$ ist in x_0 differenzierbar und

$$d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0),$$

wobei $g(x_0) \cdot df(x_0) := \sum_{i=1}^{p} g^i(x_0) df^i(x_0)$ usw.

(iii) Wenn $p = 1$ und $g(x_0) \neq 0$, dann ist der Quotient $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Kettenregel

Falls f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ (df(x_0)) = dg(f(x_0))df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q.$$

Richtungsableitungen

Wir sagen, dass f an der Stelle x_0 in Richtung v differenzierbar ist genau dann, wenn die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, \quad g(t) := f(x_0 + tv),$$

im Punkt $t = 0$ differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die (Richtungs-)Ableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v als den Vektor

$$d_v f(x_0) := D_v f(x_0) := g'(0) := \begin{pmatrix} g_1'(0) \\ \vdots \\ g_p'(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

Vektorfelder, Gradientenfeld

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung

$$X : U \to \mathbb{R}^n.$$

Sei $f \in C^1(U)$. Wir definieren das Gradientenfeld von f als

$$\nabla f : U \to \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix}.$$

Potential, konservativität eines Vektorfeldes

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Ein Potential für X ist eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, sodass

$$\partial f = X.$$

Das Vektorfeld X heisst konservativ genau dann, wenn es ein Potential besitzt.

Wegintegral

Wir definieren das Wegintegral von X längs γ als

$$\int X \cdot d\gamma := \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

Geschlossenheit eines Weges

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

Ein Weg $\gamma : [a, b] \to U$ heisst geschlossen genau dann, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

weg-zusammenhängend, konvex

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) S heisst weg-zusammenhängend genau dann, wenn es für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in S$ einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \to S$ von x_0 nach x_1 gibt, d. h.

$$\gamma(i) = x_i, \quad \text{für } i = 0, 1.$$

(ii) S heisst konvex genau dann, wenn für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in S$ und jedes $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\gamma(t) := (1 - t)x_0 + tx_1 \in S.$$

Charakterisierung der Konservativität mittels Ableitungen, Integrabilitätsbedingung, Rotation eines Vektorfeldes

(i) Falls X konservativ ist, dann erfüllt es die Integrabilitätsbedingung

$$D_i X^j = D_j X^i, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

(ii) Falls U einfach zusammenhängend ist und weg-zusammenhängend und konvex ist, dann ist X konservativ.

einfach-wegzusammenhängend

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend genau dann, wenn S weg-zusammenhängend ist und für jede stetige Abbildung $\gamma : S^1 \to S$ es eine stetige Ableitung $h : [0, 1] \times S$ gibt, sodass

$$h(0, y) = \gamma(y), \forall y \in S^1, \quad \gamma' := h(1, \cdot) : S^1 \to S \text{ ist konstant.}$$

Rotation eines Vektorfeldes

(i) Fall $n = 2$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^2$ ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die (skalare) Rotation (oder Wirbelstärke) von X als die reellwertige Funktion

$$\text{rot } X := D_1 X^2 - D_2 X^1 = \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} : U \to \mathbb{R}.$$

(ii) Fall $n = 3$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die Rotation von X als das Vektorfeld

$$\vec{\text{rot}}\ X := \nabla \times X := \begin{pmatrix} D_2 X^3 - D_3 X^2 \\ D_3 X^1 - D_1 X^3 \\ D_1 X^2 - D_2 X^1 \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^3.$$

höhere (stetige) partielle Differenzierbarkeit, C^k

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir nennen jede Funktion $f : U \to \mathbb{R}^p$ 0-mal partiell differenzierbar (keine Bedingung). Ihre (eindeutige) partielle Ableitung 0-ter Ordnung ist f. Rekurdiv definieren wir für $k \in \mathbb{N}$:

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^p$ heisst k-mal partiell differenzierbar genau dann, wenn sie $(k - 1)$-mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen $(k - 1)$-ter Ordnung partiell differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen von f k-ter Ordnung sind die Funktionen $D_j g$, wobei $j \in \{1, \dots, n\}$ und g alle partiellen Ableitungen von f $(k - 1)$-ter Ordnung durchläuft.

Wir nennen f k-mal stetig partiell differenzierbar (oder k-mal stetig differenzierbar oder schlicht C^k) genau dann, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetig sind. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Menge

$$C^k(U, \mathbb{R}^p) := (C^k(U; \mathbb{R}^p) := \{F : U \to \mathbb{R}^p | f \text{ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}).$$

Wir nennen f beliebig oft stetig partiell differenzierbar (oder C^∞ oder glatt) genau dann, wenn f C^k ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

Schwarz, Vertauschen partieller Differentiationen Es gilt

$$D_i D_j f = D_j D_i f.$$

Taylorpolynom

Wir definieren das Taylorpolynom von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 als die Funktion $T^m_{f,x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} T^m_{f,x_0}(x) &:= \sum_{k=0}^m \frac{i_1, \dots, i_k = 1}{n} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^k (x - x_0)_{i_j} \\ &= f(x_0) + \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} f(x_0)(x - x_0)_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2=1}^n D_{i_2} D_{i_1} f(x_0)(x - x_0)_{i_1}(x - x_0)_{i_2} + \dots + \\ &\quad \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^n D_{i_m} \cdots D_{i_1} f(x_0)(x - x_0)_{i_1} \cdots (x - x_0)_{i_m}. \end{aligned}$$

Taylorformel Es gibt eine Zahl $\theta \in (0, 1)$, sodass gilt

$$f(x) = T^m_{f,x_0}(x) + \sum_{lapha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_\theta)(x - x_0)^\alpha.$$

Restglied

Wir definieren das Restglied von f m-ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 als die Funktion

$$R^m_{f,x_0} := f - T^m_{f,x_0} : U \to \mathbb{R}.$$

strikte lokale Extremalstelle

Wir nennen x_0 eine lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in V \ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in V \ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine lokale Maximalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in V \ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in V \ \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Extremalstelle von f genau dann, wenn x_0 eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle ist.

kritischer Punkt

x_0 heisst kritischer (oder stationärer) Punkt von f genau dann, wenn die Ableitung von f in x_0 verschwindet, d. h.

$$df(x_0) = 0.$$

Hesse-Matrix

Wir definieren die Hesse-Matrix von f im Punkt x_0 als die quadratische Matrix

$$\text{Hess}_f(x_0) := (D_i D_j f(x_0))^n_{i,j=1}.$$

Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum

C^k-Diffeomorphismus, Umkehrsatz

Eine Abbildung $f : U \to V$ heisst C^k-Diffeomorphismus genau dann, wenn sie bijektiv und C^k ist und ihre Umkehrung C^k ist. Wir nennen einen C^∞-Diffeomorphismus einen glatten Diffeomorphismus oder einfach einen Diffeomorphismus.

Umkehrsatz

Seien $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in C^k(U_0, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in U_0$ ein Punkt, sodass $Df(x_0)$ invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq U_0$ von x_0, sodass $f(U)$ offen ist und die Einschränkung

$$f : U \to f(U)$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Implizite Funktionen

Wir nehmen an, dass

$$f(x_0, y_0) = 0, D_y f(x_0, y_0) \text{ invertierbar ist.}$$

Die folgenden Aussagen gelten:

- Es gibt offene Umgebungen U von x_0 und V von y_0 ind eine Abbildung

$$g \in C^k(U, V),$$

sodass

$$\begin{gathered} U \times V \subseteq W, \\ f^{-1}(0) \cap (U \times V) = \text{gr}(g) = \{(x, g(x)) | x \in U\}, \\ D_y f(x, g(x)) \text{ invertierbar ist,} \quad \forall x \in U. \end{gathered}$$

(gr(g) = Graph von g)

(ii) Seien U, V und g wie in (i) und $x \in U$. Dann gilt

$$Dg(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums

Seien $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $d \in \{0, \dots, n\}$.

Sei $x_0 \in M$. Wir sagen, dass M um x_0 eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann, wenn es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0, eine Permutation σ von $\{1, \dots, n\}$, eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $f \in C^k(V, \mathbb{R}^{n-d}$ gibt, sodass

$$\{(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}) | x \in M \cup U\} = \text{gr}(f) = \{(y, f(y)) | y \in V\}.$$

Wir nennen M eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn M diese Bedingung für jedes $x_0 \in M$ erfüllt. In Fall $k = \infty$ nennen wir eine solche Teilmenge M eine glatte (d-dimensionale) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Immersionen, Einbettungen, Submersionen, Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten

Seien $n, p \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^p$.

Sei $x \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist. Wir sagen, dass f ein Punkt x eine Immersion ist genau dann, wenn $Df(x)$ injektiv ist. Wir sagen, dass f im Punkt x eine Submersion ist genau dann, wenn f in jedem Punkt eine Immersion / Submersion ist.
Wir nennen f eine C^k-Einbettung genau dann, wenn f injektiv, C^k und eine Immersion ist und $f^-1 : f(U) \to U$ stetig ist.

Satz von regulären Wert

Das Urbild jedes regulären Wertes für g ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - p$.

Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit

Tangentialraum

Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in M$.

Wir definieren $T_{x_0} M$, den Tangentialraum an M in Punkt x_0 als die Menge

$$T_{x_0} M := \left\{ \dot{x}(0) | W \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}, x : W \to \mathbb{R}^n : \atop 0 \in W, x(0) = x_0, x(t) \in M, \forall t \in W, x \text{ differenzierbar in } 0 \right\}.$$

Wir nennen die Elemente von $T_{x_0} M$ Tangentialvektoren an M in Punkt x_0.

Charakterisierung des Tangentialraumes

(i) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0, $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$ so, dass

$$M \cap U = \text{gr}(f) = \{(y, f(y)) | y \in V\}.$$

Wir bezeichnen die erste Komponente von $x_0 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ mit y_0. Es gilt

$$T_{x_0} M = \text{gr}(Df(y_0)).$$

(ii) Seien $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $y_0 \in V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\psi(y_0) = x_0, \quad \psi(V) = M \cap U.$$

und ψ im Punkt y_0 eine Immersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0} M = \text{im}(D\psi(y_0)).$$

(iii) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $g : U \to \mathbb{R}^{p=n-d}$ so, dass

$$M \cap U = g^{-1}(g(x_0)).$$

und g im Punkt x_0 eine Submersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0} M = \ker(Dg(x_0)) = Dg(x_0)^{-1}(0).$$

Tangentialabbildung

Wir definieren die Tangentialabbildung (oder Ableitung) von f im Punkt x_0 als

$$Df(x_0) := DF(x_0)|_{T_{x_0}M} \to T_{f(x_0)}N,$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ eine Fortsetzung von $f|_{M \cap U}$ ist.

kritischer Punkt

Ein Punkt $x_0 \in M$ heisst kritischer (oder stationärer) Punkt für f genau dann, wenn die Tagentialabbildung von f in x_0 verschwindet, d. h.

$$Df(x_0) = 0.$$

Wir schreiben

$$\text{Crit } f := \{\text{kritische Punkte für } f\}.$$

Lagrangefunktion

Wir definieren die Lagrangefunktion für (F, g) als die Funktion

$$L := L_{F,g} : U \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda^T g(x).$$

Lagrange-Multiplikationsregel

Wir nehmen an, dass 0 ein regulärer Wert von g ist. Sei $x_0 \in U$. Dann gilt $x_0 \in \text{Crit } f$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$ gibt, sodass $(x_0, \lambda) \in \text{Crit } L$.

Vektorfeld

Kurvenintegral

Eine (eingebettete) C^k-Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension 1.

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^1-Kurve.

Es gilt:

(i) Es gibt ein $l \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $j = 1, \ldots, l$ ein kompaktes Intervall I_j positiver Länge und eine Immersion $x_j \in C^1(I_j, \mathbb{R}^n)$, sodass

$$\bigcup_{j=1}^{l} x_j(I_j) = C$$

und so, dass die Abbildung

$$\bigcup_j \{j\} \times \text{Int } I_j \ni (j, t) \mapsto x_j(t) \in C$$

injektiv ist. (Dabei bezeichnet Int I_j das Innere von I_j)

Seien jetzt $f : C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und l und $(I_j, x_j)_{j=1,\ldots,l}$. Wir definieren

$$I(f, (I_j, x_j)_j) := \sum_{j=1}^{l} \int_{I_j} f \circ x_j(t) ||\dot{x}_j(t)|| dt.$$

(ii) Die Zahl $I(f, (I_j, x_j)_j)$ hängt nicht von $(I_j, x_j)_j$ ab.

Wir definieren das (Kurven-)Integral von f über C als

$$\int_C f ds := I(f, (I_j, x_j)_j).$$

Kurvenintegral eines Vektorfeldes

Wir nehmen an, dass C kompakt ist. Wir definieren das (Kurven-)Integral (oder das Ringintegral oder die Zirkulation) von X über C bezüglich T als

$$\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} := \int_C X \cdot T ds,$$

wobei die rechte Seite das Kurvenintegral der Funktion $X \cdot T : C \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

C^k – Gebiet

Ein (n-dimensionales) C^k-Gebiet ist eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass es für jeden Punkt $x_0 \in \partial U$ eine offene Umgebung U^i von x_0 und eine C^k-Submersion $g : U' \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$g(x_0) = 0, \quad U \cap U' = g^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) < 0\}.$$

positive Orientierung des Randes

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $C^1 - Gebiet$. Wir definieren die positive Orientierung von ∂U (bezüglich U),

$$T : \partial U \to \mathbb{R}^2,$$

wie folgt. Seien $x_0 \in \partial U$ und U', g wie in der obigen Definition. Wir definieren $T(x_0) \in T_{x_0}\partial U$ als den eindeutigen Vektor der Länge 1, sodass das (geordnete) Paar $(\nabla g(x_0), T(x_0))$ eine positive Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Satz von Green

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes C^1-Gebiet und X ein C^1-Vektorfeld auf $\bar{U}$. Dann ist das Integral der Rotation von X über U gleich dem Integral von X über den Rand von U, d. h.

$$\int_U \text{rot } X dx = \int_{\partial U, T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial U} X \cdot T ds.$$

wobei T die positive Orientierung von ∂U ist.

Untermannigfaltigkeit mit Rand und Koorientierung einer Hyperfläche

Parametrisierung, Untermannigfaltigkeit am Rand

Eine likale innere C^k-Parametrisierung von M (der Dimension d) ist ein Paar (V, ψ), wobei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(V) = M \cap U$ gibt. Eine lokale C^k-Randparametrisierung von M ist ein Paar (V, ψ), wobei

$$V \subseteq \mathbb{R}^d_{\geq 0} := \mathbb{R}^{d-1} \times [0, \infty).$$

eine (relativ) offene Teilmenge ist und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Einbettung ist, sodass es eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(V) = M \cap U$ gibt. Eine lokale C^k-Parametrisierung von M ist eine lokale innere oder Randparametrisierung vom M der Klasse C^k.

Wir nennen M eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension D mit Rand genau dann, wenn es für jeden Punkt $x_0 \in M$ eine lokale C^k-Parametrisierung (V, ψ) mit $x_0 \in \psi(V)$ gibt. Sie M eine solche Untermannigfaltigkeit. Wir definieren den intrinsischen Rand von M als die Menge

$$\partial M := \bigcup \{\psi(V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})) | (V, \psi) \text{ lokale } C^k \text{ Randparametrisierung von } M\}.$$

parametrisierte Untermannigfaltigkeit

Eine (globale) C^k-Parametrisierung von M ist ein Paar (V, ψ), wobei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes offenes C^k-Gebiet ist und $\psi : \bar{V} \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Einbettung mit Bild M ist. Wir nennen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte (global) parametrisierte C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension d mit Rand genau dann, wenn es eine globale C^k-Parametrisierung von M gibt.

Einheitsnormalvektorfeld

Eine Koorientierung von M (oder ein Einheitsnormalvektorfeld auf M) ist eine Abbildung $\nu \in C(M, \mathbb{R}^n)$, sodass

$$\nu(x) \in T_x M^{\perp}, ||\nu(x)|| = 1, \forall x \in M.$$

induzierte Orientierung

Wir definieren Die durch ν induzierte Orientierung T von $\partial\Sigma$ wie folgt. Seien $x \in \partial\Sigma$ und (V, ψ) eine lokale C^1-Randparametrisierung von Σ, deren Bild x enthält und die positive Orientierung erfüllt. Wir definieren $y := \psi^- 1(x) \in V \subseteq \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ und

$$T(x) := \frac{D_1 \psi(y)}{||d_1 \psi(y)} \in \mathbb{R}^3.$$

Integral über kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand

Für jedes $f \in C(M, \mathbb{R})$ definieren wir das Riemann-Integral von f (über M) als

$$\int_M f dA := I(f, \psi_j, S_j),$$

wobei die rechte Seite eine parametrisierbare Untermannigfaltigkeit ist mit einer beliebigen Kollektion $(\psi_j, S_j)_j$. Wir definieren das d-dimensionale Volumen von M als

$$\text{Vol}_d(M) := \int_M 1 dA.$$

Fluss durch Hyperfläche

Wir definieren den Fluss von X durch M bezüglich ν als das Integral

$$\int_{M,\nu} X \cdot d\mathbb{A} := \int_M X \cdot \nu dA,$$

wobei die rechte Seite ein Integral über kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

Seien $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte C^2-Fläche, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ eine Koorientierung. $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von Σ und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt, dass

$$\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times X) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma} (\nabla \times X) \times \nu dA = \int_{\partial\Sigma, T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\Sigma} X \cdot T ds,$$

wobei T die durch ν induzierte Orientierung von $\partial\Sigma$ ist.

Der Satz von Gauss

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Integral der Divergenz von X über U gleich dem Fluss von X durch den Rand von U, d. h.

$$\int_U \nabla \cdot X dx = \int_{\partial U, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial U} X \cdot \nu dA,$$

wobei ν die nach aussen weisende Koorientierung von ∂U ist.

Einfache Geometrieformeln

	Fläche/Volumen	Umfang/Oberfläche
Kreis	$A = \pi r^2$	$U = 2\pi r$
Kugel	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S = 4\pi r^2$
Ellipsoid	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	
Zylinder	$V = \pi r^2 h$	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

Tabelle mit Ableitungen und Stammfunktionen

$f'(x)$	$\overset{\frac{d}{dx}}{\underset{\int f(x)dx}{\rightleftarrows}}$	$f(x)$	$\overset{\frac{d}{dx}}{\underset{\int f(x)dx}{\rightleftarrows}}$	$F(x)$
$n \cdot x^{n-1}$		x^n		$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
e^x		e^x		e^x
$\frac{1}{x}$		$\log\|x\|$		$x(\log\|x\| - 1)$
$\cos(x)$		$\sin(x)$		$-\cos(x)$
$-\sin(x)$		$\cos(x)$		$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$		$\tan(x)$		$-\log\|\cos(x)\|$
$\frac{1}{\log(a) \cdot x}$		$\log_a\|x\|$		
$\log(a) \cdot a^x$		a^x		$\frac{1}{\log(a)} a^x$
$x^x(\log(x) + 1)$		x^x		
$\cosh(x)$		$\sinh(x)$		
$\sinh(x)$		$\cosh(x)$		
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$		$\tanh(x)$		$\log(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$		$\arcsin(x)$		
$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$		$\arccos(x)$		
$\frac{1}{1 + x^2}$		$\arctan(x)$		
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$		$\text{arsinh}(x)$		
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$		$\text{arcosh}(x)$		
$\frac{1}{1 - x^2}$		$\text{artanh}(x)$		

Bemerkung: Bei Ableitungen mit Logarithmen, sowie den inversen Trigo- und Hyperfunktionen ist der Definitionsbereich eingeschränkt!

Spass mit Integralen

Tangenssubstitution

Sei $t(x) = \tan(\frac{x}{2})$ mit $x \in]-\pi, \pi[$. Dann gilt

$\cos(x) = \frac{1 - t^2(x)}{1 + t^2(x)}$	$\sin(x) = \frac{2t(x)}{1 + t^2(x)}$
$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + t^2(x)}$	$\sin^2(x) = \frac{t^2(x)}{1 + t^2(x)}$

Mit dieser Substitution kann man gewisse Trigonometrische Integrale einfacher lösen.

Rückwärtssubstitution

Die Substitutionsregel lässt sich auch rückwärts durchführen. Sei $\varphi(x)$ *injektiv*. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx}$$

Bei geschickter Wahl der Funktion $\varphi(x)$ kann entgegen des ersten Anscheins der Integrand vereinfacht werden.

Tabelle

Bem: Nach Anwendung der Regel ist die Trigo-Identiät $(cos^2(x) + sin^2(x) = 1)$ notwendig!

Integral	Rücksubstitution		
$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 - t^2} dt$	$\varphi(x) = \sin(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \arcsin(t)$	$\varphi'(x) = \cos(x)$
$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 - t^2} dt$	$\varphi(x) = a \cdot \sin(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$	$\varphi'(x) = a \cdot \cos(x)$
$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt$	$\varphi(x) = a \cdot \sin(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$	$\varphi'(x) = a \cdot \cos(x)$
$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + t^2} dt$	$\varphi(x) = \sinh(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arsinh}(t)$	$\varphi'(x) = \cosh(x)$
$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t^2 - 1} dt$	$\varphi(x) = \cosh(x)$	$\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arcosh}(t)$	$\varphi'(x) = \sinh(x)$

Integrale über eine Periode (Orthogonalitätsrelationen)

Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Relationen:

$\int_0^T \sin(n\omega t)dt = 0$	$\int_0^T \cos(n\omega t)dt = 0$
$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} & n = m \end{cases}$	$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} & n = m \end{cases}$
$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$	

Liste von Trigonometrischen Integralen

Man kann diese Integrale *normalerweise* benutzen bei der Prüfung, solange man auf die Identität vermerkt. Man setzt dabei einfach die Integralgrenzen ein, wie man es intuitiv machen würde.

$\int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + C$	$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln\left\vert\frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}\right\vert + C$
$\int \cos^2(x)dx = \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2} + C$	$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln\left\vert\frac{-\cos(x)}{\sin(x) - 1}\right\vert + C$
$\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{sin^2(x)}{2} + C$	$\int \frac{1}{\tan(x)} dx = \ln\vert\sin(x)\vert + C$
$\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
$\int \sin(x)\cos^2(x)dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + C$
$\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \frac{1}{32}(4x - \sin(4x)) + C$	$\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2} + C$
$\int \arccos(x)dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2} + C$	$\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\vert x^2 + 1\vert + C$
$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)dt = \frac{3\pi}{4}$	$\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^3(t)dt = 0$
$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \pi$	$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt = 0$
$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$	

Tabelle von ausgewerteten Integralen

Mit der Begründung "Symmetrie" ist es normalerweise erlaubt die *Nullintegrale* der Tabelle zu benutzen.

Den Rest der Tabelle würde ich nur zur Überprüfung der Resultate an der Prüfung verwenden. Denke nicht, dass es Pünkte gibt, wenn man direkt das Resultat schreibt.

Funktion:	Integralgrenzen:						
	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2(x)$	$\frac{\pi - 2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi - 2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3(x)$	$\frac{8 - 5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\cos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2(x)$	$\frac{2 + \pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2 + \pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3(x)$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\sin \cdot \cos(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2 \cdot \cos(x)$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin \cdot \cos^2(x)$	$\frac{4 - \sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0