

Analysis I

Jirayu Ruh

Inhaltsverzeichnis

I Analysis I 5

Kapitel 1	Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen	Seite 6
1.1	Logik	6
	Grundlagen — 6 • Äquivalenz — 7 • Axiome, Sätze und Beweise — 7	
1.2	Mengenlehre	8
	Grundlagen — 8 • Mengenoperationen und Teilmengenrelation — 8	
1.3	Quantoren	11
1.4	Funktionen	11
Kapitel 2	Zahlen und Vektoren	Seite 14
2.1	Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen	14
2.2	Die reellen Zahlen	14
2.3	Supremum und Infimum	18
2.4	Komplexe Zahlen	19
Kapitel 3	Folgen und Reihen	Seite 20
3.1	Folgen und Grenzwerte davon	20
3.2	Konvergenzkriterien	21
3.3	Limes superior und inferior Folgen in \mathbb{R}^d , Cauchy-Kriterium	22
3.4	Reihen	24
3.5	Absolute Summierbarkeit einer Folge, absolute Konvergenz einer Reihe	27
3.6	Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus	28
Kapitel 4	Stetigkeit, Topologie	Seite 30
4.1	Stetigkeit	30
4.2	Topologie, innerer Punkt, Inneres, Offen- und Abgeschlossenheit einer Menge, Rand, Konvergenz einer Funktion an einer Stelle	31
4.3	Topologisches Kriterium für Stetigkeit	34
4.4	Zwischenwertsatz und Folgerungen, Stetigkeit der Umkehrfunktion	34
4.5	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	36
Kapitel 5	Differentialrechnung auf \mathbb{R}	Seite 37
5.1	Differential und Differentiationsregeln	37

5.2	Mittelwertsatz und Folgerungen	38
5.3	Die komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische, Arkus-, Hyperbel- und Areafunktionen	40
5.4	Höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen	41
5.5	Taylornäherung einer Funktion, lokale Extrema	42

Kapitel 6	Integration	Seite 45
6.1	Bestimmtes Riemann-Integral: Definition und Beispiele	45
6.2	Eigenschaften der Riemann-Integration	46
6.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktion	47
6.4	Unbestimmte Integration	49
6.5	Partielle Integration, Anwendung: Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ als Wallissches Produkt	49
6.6	Substitutionsregel, Anwendungen: gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, Separation der Variablen, Partialbruchzerlegung, Strategien für das Integrieren	49
6.7	Integration und gleichmässiger Limes, gliedweise Integration einer Potenzreihe	50
6.8	Uneigentliches Riemann-Integral	51

II Analysis II 53

Kapitel 7	Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik	Seite 54
7.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung, Anfangswertproblem, Beispiele, gedämpfter Feder-schwinger, elektrische Schwingkreis	54
7.2	Linearität und Homogenität einer GDG, Superpositionsprinzip, Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, charakteristisches Polynom einer GDG	55
7.3	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme	56

Kapitel 8	Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	Seite 57
8.1	Partielle Ableitung und Differential	57
8.2	Differentiationsregeln, Kettenregel, Richtungsableitung, Gradient, stetige Differenzierbarkeit	59
8.3	Vektorfeld, Potential und Wegintegral	60
8.4	Charakterisierung der Konservativität mittels Ableitungen, Integrabilitätsbedingung, Rotation eines Vektorfeldes	61
8.5	Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Taylorpolynom, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix	62

Kapitel 9	Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Ko-ordinatenraums, Tangentialraum	Seite 66
9.1	C^k -Diffeomorphismus, Umkehrsatz	66
9.2	Der Satz über implizite Funktionen	66
9.3	Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums	67
9.4	Immersionen, Einbettungen, Submersionen, Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten	67
9.5	Satz von regulären Wert	68
9.6	Tangentenraum an eine Untermannigfaltigkeit	68

9.7	Tangentialabbildung	69
9.8	kritische Punkte einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , Lagrange Multiplikationsregel	70

Kapitel 10 **Mehrdimensionale Riemann-Integration, Satz von Fubini über wiederholte Integration, Jordan-Mass, Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale** Seite 71

10.1	Riemann-Integral	72
10.2	Eigenschaften des Riemann-Integrals	73
10.3	Satz von Fubini, wiederholte Integration	73
10.4	Jordan-Mass	74
10.5	Substitutionsregel, Integral einer drehinvarianten Funktion, Transformationssatz für das Volumen	74

Kapitel 11 **Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauss** Seite 76

11.1	Kurvenintegral, Orientierung, C^k -Gebiet	76
11.2	Satz von Green	78
11.3	Untermannigfaltigkeit mit Rand und Koorientierung einer Hyperfläche	78
11.4	Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit, Zusammenhang mit dem Kurvenintegral	79
11.5	Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit, zweidimensionaler Fall, Fluss eines Vektorfeldes durch Hyperfläche	80
11.6	Satz von Stokes	80
11.7	Satz von Gauß	80

Kapitel **References** Seite 80

DISCLAIMER

Diese Notizen wurden verfasst auf Basis der Vorlesung Analysis I (HS24) von F. Ziltener und dem Skript „Analysis für Informatiker“ von Michael Struwe.

Ich übernehme keine Haftung über mögliche Fehler in den Notizen (Es hat sicherlich ein paar drinnen, da ich teils Sätze umformuliert habe und meine Persönliche Notizen beigefügt habe!).

Alle Grafiken wurden eigenhändig mit Manim [[The Manim Community Developers, 2024](#)] generiert.

Fehler können per Mail an jirruh@ethz.ch gemeldet werden.

Teil I

Analysis I

Kapitel 1

Grundlagen: Logik, Mengen, Funktionen

1.1 Logik

1.1.1 Grundlagen

In der Logik werden (mathematische) Aussagen untersucht. Eine Aussage ist eine Äusserung, die entweder wahr oder falsch ist. [Ziltener, 2024] (wahr oder falsch).

In der mathematischen Logik gelten die folgenden Sätze.

- **Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch:** Eine Aussage ist nicht sowohl wahr als auch falsch.
- **Satz vom ausgeschlossenen Dritten:** Jede Aussage ist wahr oder falsch.

[Ziltener, 2024]

Bemerkung:-

Es gibt gewisse Aussagen, als logische Aussage gelten könnte aber nicht zulässig ist. Solche Aussagen sind meistens rückbezügliche Äusserungen und sind deswegen keine sinnvollen Aussagen. (Siehe Lügner-Paradox)

Aussagen können verneint und miteinander verknüpft werden.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
T	wahr	
F	falsch	
$\neg A$	nicht A	Negation

Für Verknüpfungen verwenden wir folgende Notationen.

Notation	Bedeutung	Bezeichnung
$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	inklusive Disjunktion
$A \dot{\vee} B$	entweder A oder B	exklusive Disjunktion
$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	genau dann A, wenn B	Äquivalenz

Die Wahrheitstabelle der vorher erwähnten Verknüpfungen ist wie folgt.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
F	F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	T

Aus der Tabelle kann man die Zusammenhänge der Verknüpfungen erkennen.

Bemerkung:-

Wir unterscheiden zwischen dem inklusiven Oder und dem exklusiven Oder. Beim inklusiven Oder können beide Aussagen wahr sein während beim exklusiven oder nur einer der beiden Aussagen wahr sein kann.

Bemerkung:-

Verknüpfende Aussagen brauchen inhaltlich nicht zusammenzuhängen.

1.1.2 Äquivalenz

Satz 1.1.1 Äquivalenz

Seien P und Q Aussagen. Wenn P und Q die gleichen Aussagen haben, so nennen wir sie logisch Äquivalent.

$$P \equiv Q \quad (1.1)$$

Sobald 2 Aussagen äquivalent sind, so ist ihre Implikation, sowie ihr Kontraponiertes logisch äquivalent.

Satz 1.1.2 Kontraponiertes

Das Kontraponierte zur Implikation $A \Rightarrow B$ ist

$$\neg B \Rightarrow \neg A \quad (1.2)$$

Dabei gilt

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist nur wahr, wenn die Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beide wahr sind.

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

1.1.3 Axiome, Sätze und Beweise

In der Mathematik sind Axiome von grosser Bedeutung. Sie sind das Fundament der Mathematik. In der Analysis werden wir jedoch Sätze verwenden, welche durch Axiome bewiesen worden sind.

Um Aussagen zu Beweisen, verwenden wir in der Logik den Modus Ponens.

Definition 1.1.1: Modus Ponens

Ein Beweis einer Aussage A ist eine sukzessive Herleitung von A aus den Axiomen, in der logische Schlussregeln angewendet werden. Eine solche Regel ist der Modus Ponens.

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \Rightarrow B \end{array}}{B}$$

A ist die Prämisse, B die Konklusion.

Aus dem Modus Ponens können wir schliessen, dass wenn A und $A \Rightarrow B$ gilt, so gilt B . Der Modus Ponens ist die Basis eines Beweises. Wir werden später sehen, dass wir den Modus Ponens im Hintergrund verwenden.

Bemerkung:-

Wir können auch Beweise durchführen durch die Kontraposition.

In der Analysis werden wir auch mit indirekten Beweisen arbeiten. Dabei nehmen wir an, dass eine Aussage falsch ist, woraus wir eine falsche Aussage herleiten. Dies nennen wir auch den Beweis mittels Widerspruch. Es lohnt sich aber oft, einen Widerspruchsbeweis als direkten Beweis umzuschreiben, da aus eine falsche oder einer wahren Aussage eine beliebige wahre Aussage hergeleitet werden kann.

Satz 1.1.3 Prinzip der vollständigen Induktion

Nehmen wir an, dass die Funktion $P(0)$ gilt. Wegen dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Grundlagen

Eine Menge ist eine ungeordnete Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Die in einer Menge enthaltenen Objekte nennen wir ihre Elemente. [Ziltener, 2024]

Satz 1.2.1 Schreibweise einer Menge

Nehmen wir an, dass x_1, x_2, \dots, x_n Elemente sind. Dann ist die Menge, bestehend aus den Elementen x_1, x_2, \dots, x_n

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Bemerkung:-

Mengen können wiederholende Elemente besitzen.

Bemerkung:-

Zahlen können bestimmte Zahlenmengen bilden. ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$)

Definition 1.2.1: Beschreibende Mengenschreibweise

Die beschreibende Mengenschreibweise ist eine Aussageform, welche Elemente x definiert, die in einer Menge enthalten sein können und eine Bedingung $P(x)$ erfüllen.

$$\{x|P(x)\} \text{ Für die Menge aller } x, \text{ für die } P(x) \text{ gilt.} \quad (1.3)$$

Bemerkung:-

$\{\dots\}$ stellen Mengen dar, während $[]$ und $()$ meistens Intervalle darstellen. $[]$ sind geschlossene Intervalle. Wenn man z.B. $[1, 5]$ schreibt, so sind es alle Zahlen zwischen 1 und 5 **inklusive** der 1 und 5. $()$ sind offene Intervalle. Schreibt man z.B. $(1, 5)$, so sind alle Zahlen zwischen 1 und 5 **exklusive** 1 und 5 gemeint.

1.2.2 Mengenoperationen und Teilmengenrelation

Wie in Kapitel 1.1 haben Mengen auch Logikoperationen. Sie sind sehr ähnlich zu den normalen Logikoperationen.

$$A \cup B \quad \{x|x \in A \wedge x \in B\} = \text{Durchschnitt}$$

$$A \cap B \quad \{x|x \in A \vee x \in B\} = \text{Vereinigung}$$

$$A \setminus B \quad \{x \in A|x \notin B\} = \text{Differenz}$$

Wenn die Menge A auch in der Menge B liegt, so ist A eine Teilmenge von B .

$$A \subseteq B.$$

Satz 1.2.2 Das Komplementär einer Menge

Das Komplementär einer Menge definiert eine Menge A , welche die Elemente einer anderen Menge B nicht beinhaltet.

$$B^C = A \setminus B.$$

Satz 1.2.3 De-Morganschen Gesetze

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Satz 1.2.4 Tupel

Wenn wir eine Liste von Elementen, bestehen aus x_1, \dots, x_n haben, so nennen wir diese Liste ein Tupel. Die Anzahl von Elementen n sowie die Anordnung der Elementen spielt eine Rolle.

- Für $n = 2$ nennen wir den Tupel ein Paar.
- Für $n = 3$ nennen wir den Tupel ein Trippel.
- Für alle anderen n bezeichnet man die Liste als n-Tupel.

Wie schon vorher erwähnt spielt die Anordnung eine grosse Rolle. $((x_1, x_2) \neq (x_2, x_1))$

Satz 1.2.5 Karthesisches Produkt

Das Produkt zweier Mengen (*karthesische Produkt*) X und Y kann als eine Menge bestehend aus den Permutationen den Elementen der beiden Mengen dargestellt werden.

Bemerkung:-

Für Potenzen gilt das gleiche Prinzip, i.e $X^2 = X \times X$, $X^3 = (X \times X) \times X$, usw.

Definition 1.2.2: Euklidische Norm

Die euklidische Norm $\|\cdot\|$ ist die Distanz von einem Punkt, z.B. v zu ihrem Ursprung und wird wie folgt berechnet.

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

- (i) Für die euklidische Norm gilt die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [Schultheis, 2025]

Satz 1.2.6 Offener und abgeschlossener Ball, Sphäre

Ein Ball oder eine Sphäre ist eine Menge von Punkten in einem n -Dimensionalen Raum, welche einen bestimmten Abstand zum Mittelpunkt des Balles bzw. der Sphäre haben.

1. Der offene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 kleiner als der Radius r ist.

$$B_r(x_0) := B_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}.$$

2. Der abgeschlossene Ball ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 kleiner oder gleich dem Radius ist.

$$\bar{B}_r(x_0) := \bar{B}_r^n(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}.$$

3. Die Sphäre ist eine Menge von Punkten, deren Abstand zum Mittelpunkt x_0 gleich dem Radius ist.

$$S_r^{n-1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}.$$

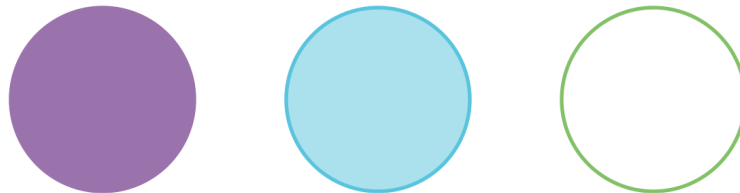


Abbildung 1.1: Von links nach rechts: Offener Ball, abgeschlossener Ball, Sphäre

Bemerkung:-

Dass die Sphäre eine Dimension verliert ($n - 1$) ist auf den ersten Blick verwirrend, macht aber Sinn. Bei einer Sphäre wird nur der Mantel betrachtet. Dadurch wird der Freiheitsgrad verringert was dazu führt, dass eine Dimension verloren geht i.e. der Mantel einer Kugel ist eine Fläche oder der Rand einer Kreisscheibe ist eine Linie.

Satz 1.2.7 Fall $r = 0$ und $r = \infty$

Falls $r = 0$ gilt für den Ball

- $B_0(x_0) = \emptyset$ da die euklidische Norm nicht kleiner als 0 sein kann
- $\bar{B}_0(x_0) = \{x_0\}$ da der einzige Punkt dessen Abstand zum Mittelpunkt null ist der Mittelpunkt selbst ist.

Falls $r = \infty$, dann gilt

- $B_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$
- $\bar{B}_\infty(x_0) = \mathbb{R}^n$

Bemerkung:-

Obwohl \mathbb{R}^n ein offener und auch ein geschlossener Ball sein kann bedeutet es nicht, dass $B_\infty(x_0) = \bar{B}_\infty(x_0)$ ist. Das Problem ist, dass kein Rand existiert für einen Kreis mit $r = \infty$. Deshalb ist \mathbb{R}^n beides.

1.3 Quantoren

Quantoren sind logische Operatoren, die angeben, wie viele Objekte x eine Bedingung $P(x)$ erfüllen. Die zwei wichtigsten Quantoren sind die folgenden: [Ziltener, 2024]

Notation	Bedeutung	Beziehung
\forall	für jedes- für alle"	Allquantor
\exists	es gibt"	Existenzquantor

[Ziltener, 2024]

Bemerkung:-

Die Reihenfolge der Quantoren spielt eine Rolle. Dies können wir an den vorherigen Beispielen erkennen.

Satz 1.3.1 Verneinung einer quantifizierten Aussageform

Die Verneinung von den Quantoren \forall und \exists ist wie folgt definiert.

$$\neg(\forall x \in X : P(x)) \equiv \exists x \in X : \neg P(x).$$

$$\neg(\exists x \in X : P(x)) \equiv \forall x \in X : \neg P(x).$$

1.4 Funktionen

Intuitiv ist eine Funktion (oder Abbildung) von X nach Y eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $y \in Y$ zuordnet. [Ziltener, 2024]

Definition 1.4.1: Funktion

Eine Funktion (oder Abbildung) ist ein Tripel

$$f = (X, Y, G),$$

wobei X und Y Mengen sind und $G \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge, sodass es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt, sodass $(x, y) \in G$.

[Ziltener, 2024]

Definition 1.4.2: Definitionsbereich, Zielbereich, Graph, Wert in einem Punkt

Für die Funktion f haben wir folgende Definitionen um die Eigenschaften einer Funktion zu definieren.

- $\text{dom } f := \text{dom}(f) :=$ Definitionsbereich von $f := X$ Der Definitionsbereich sind die Werte von x , welche für diese Funktion erlaubt sind.
- $\text{codom } f := \text{codom}(f) :=$ Zielbereich von $f := Y$ Der Zielbereich sind die Werte von y , welche für diese Funktion erlaubt sind.
- Graph von $f := G$
- Wert von f an der Stelle $x \in X := f(x) := y$
- $f : X \rightarrow Y := "$ dom $f = X$ und codom $f = Y$ "

Definition 1.4.3: Bild

Das Bild einer Funktion f ist eine Menge, welche die möglichen $\text{codom}(f)$ beinhaltet ($\text{im}(f) \subseteq \text{codom}(f)$).

$$f(A) := \{f(x) | x \in A\}.$$

Was bedeutet das? Wenn wir die Menge A , welches eine Teilmenge von X ist, auf f verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von Y .

Definition 1.4.4: Urbild

Das Urbild einer Funktion f ist eine Menge, welche die möglichen $\text{dom}(f)$ beinhaltet ($f^{-1} \subseteq \text{dom}(f)$)

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Was bedeutet das? Wenn wir die Menge B , welches eine Teilmenge von Y ist, auf die Inverse von f (f^{-1}) verwenden, so bekommen wir ein Teil, gegebenenfalls alle Elemente von X .

Wir werden nun weitere Eigenschaften von Funktionen kennenlernen: Die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Definition 1.4.5: Injektiv

Eine Funktion ist injektiv wenn

$$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Einfach gesagt bedeutet dies, dass ein Element von X nicht dasselbe Resultat ausgibt, wenn das Element in die Funktion eingesetzt wird.

Definition 1.4.6: Surjektiv

Eine Funktion ist surjektiv wenn

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

Einfach gesagt bedeutet dies, dass ein Element von Y durch ein Element von X zugeordnet ist. Dabei kann ein Element von X auch mehrere Elemente von Y zugeordnet sein.

Definition 1.4.7: Bijektiv

Eine Funktion ist bijektiv wenn sie injektiv und surjektiv ist. Mathematisch bedeutet dies

$$(\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \wedge (\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y).$$

Bemerkung:-

Funktionen können injektiv und surjektiv (und gegebenenfalls bijektiv) gemacht werden, wenn der Wertebereich geändert wird.

Bemerkung:-

Die Identität ist eine Funktion, welches sich selber wieder ausgibt.

$$f(x) = x.$$

Definition 1.4.8: Umkehrfunktion / Inverse

Die Umkehrfunktion oder Inverse einer Funktion ist eine Funktion, welches das Gegenteil der ursprünglichen Funktion f macht.

$$f^{(-1)} : Y \rightarrow X, f^{(-1)}(y) := x.$$

In anderen Worten: wenn man ein Element von X in die Funktion einsetzt, so bekommt man ein Element von Y . Wichtig zu erwähnen ist, dass eine Inverse nur existiert, wenn die Funktion bijektiv ist.

Definition 1.4.9: Verknüpfung von Funktionen

Die Verknüpfung von Funktion ist wie folgt definiert.

$$g \circ f : X \rightarrow Z, g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Dies bedeutet nichts weiter, dass der $\text{codom}(f)$ in die Funktion g eingesetzt wird, und Elemente von Z dabei herauskommen.

Wichtig zu erwähnen ist, dass die $\text{codom}(f) = \text{dom}(g)$ ist, weil sonst die Verknüpfung nicht funktionieren würde.

Kapitel 2

Zahlen und Vektoren

Neben Logik bilden Zahlen die Basis für die Analysis.

2.1 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen

Definition 2.1.1: Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind definiert als alle positive ganze Zahlen.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Die ganzen Zahlen sind alle ganzen Zahlen.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Die rationalen Zahlen sind alle Brüche.

$$\mathbb{R} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bemerkung:-

1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (Die Menge der ganzen Zahlen beinhaltet die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen beinhaltet die Menge der ganzen Zahlen)
2. \mathbb{N}_0 beschreibt die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0.

Trotz der unendlichen Möglichkeiten rationale Zahlen zu bilden wird es immer noch Löcher in der Zahlenebene geben, welche nicht von den rationalen Zahlen gedeckt werden kann. Deshalb führen wir eine neue Art von Zahl ein.

2.2 Die reellen Zahlen

Wie im letzten Kapitel besprochen führen wir eine neue Zahl ein, welche die Löcher in der Zahlenebene "stopfen" kann. Diese Zahl, auch reelle Zahl genannt, wird auch als Dedekind-Schnitte bezeichnet.

Definition 2.2.1: Menge der reellen Zahlen, Dedekind-Schnitte [Ziltner, 2024]

Eine reelle Zahl (oder Dedekind-Schnitt oder Dedekindscher Schnitt) ist eine Teilmenge $x \subseteq \mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $x \neq \emptyset$
- (b) $x \neq \mathbb{Q}$
- (c) $\forall r \in x \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in x$
- (d) $\forall r \in x \exists s_0 \in x : s_0 < r$

Wir definieren

$$\mathbb{R} := \text{reelle Zahl} = \text{Dedekind-Schnitt}.$$

Bemerkung:-

Die Definition von Herr Ziltner ist eine alternative Definition. Normalerweise tut man die untere Hälfte definieren. Da die Rechenoperationen der unteren Hälfte aufwendiger zu definieren ist als die obere, definieren wir die untere Hälfte.

In anderen Worten ist eine reelle Zahl eine Menge von rationalen Zahlen, welche in eine oberen und in einer unteren Hälfte unterteilt ist. Dies beide Hälften sind eine Teilmenge der rationalen Zahlen. Punkt (a) besagt, dass die untere Hälfte rationale Zahlen beinhalten muss und nicht die leere Menge sein darf. Zusätzlich darf die untere Hälfte nicht eine reelle Zahl sein da sonst die untere Hälfte die ganze Zahlenebene wäre. Dies besagt Punkt (b). Punkt (c) sagt aus, dass eine rationale Zahl s gibt, welche kleiner ist als die Zahl r , welche sich in der unteren Hälfte befindet. Zusätzlich gilt laut (d), dass es kein grösstes Element s_0 gibt, welches grösser als r ist.

Bemerkung:-

Damit es keine Verwirrung gibt zwischen der reellen Zahl $r = \sqrt{2}$ und der reellen Zahl als ein Intervall von einem Dedekind-Schnitt wird diese als \mathbf{r} gekennzeichnet. (In der Vorlesung $\boxed{\mathbf{r}}$)

Formell beschreiben wir der Dedekind-Schnitt

$$\mathbf{r} := \{s \in \mathbb{Q} \mid s < r \in \mathbb{R}\}$$

was nichts anderes Bedeutet als \mathbf{r} ist die Menge aller rationalen Zahlen s , wobei s kleiner als r , der Grenzwert vom Intervall ist.

Da wir die reellen Zahlen als eine Menge definiert haben, kann man die üblichen Rechenoperationen nicht mehr wie bei "normalen" Zahlen verwenden.

Definition 2.2.2: Ordnung, Addition, Multiplikation reeller Zahlen [Ziltener, 2024]

(i) (Ordnung:) Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x \leq y :\Leftrightarrow x \supseteq y \text{ d.h. } y \subseteq x.$$

$$x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y.$$

(ii) (Addition:) Wir definieren die Addition reeller Zahlen als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$x + y := +(x, y) := r + s \mid r \in x, s \in y.$$

(iii) (Subtraktion:) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $-x$ als das eindeutige Element von \mathbb{R} , sodass

$$x + (-x) = 0.$$

(iv) (Multiplikation:) Wir definieren die Multiplikation reeller Zahlen als die Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \cdot y = \begin{cases} \{rs \mid r \in x, s \in y\}, & \text{falls } x, y \geq 0. \\ -((-x) \cdot y), & \text{falls } x < 0, y \geq 0. \\ -(x \cdot (-y)), & \text{falls } x \geq 0, y < 0. \\ (-x \cdot (-y)), & \text{falls } x, y < 0 \end{cases}.$$

Gehen wir die einzelnen Punkte durch. (i) besagt, dass die untere Hälfte $x \geq$ die andere untere Hälfte y ist, genau dann wenn x eine Teilmenge von y ist. Zusätzlich gilt, dass $x > y$ ist wenn $x \leq y$ ist und $x \neq y$ ist. In einfachen Worten gesagt bedeutet dies, dass wenn der untere Grenzwert von x kleiner ist als der untere Grenzwert von y , so ist y entweder in x enthalten da sich die zwei Mengen schneiden oder x und y gleich.

(ii) sagt aus, dass wenn du ein beliebiges Element aus x nimmst und ein beliebiges Element aus y nimmst und die zusammen addierst, so erhältst du eine Zahl, welches grösser ist als $X + Y$, wobei X die reelle Zahl ist, welche x darstellen soll und Y respektive die reelle Zahl ist, welche y darstellen soll.

(iii) ist hoffentlich klar.

(iv) ist einfach eine komplizierte Art die Multiplikation zu definieren. Grundsätzlich sagt es aus, dass wenn du ein Element von x nimmst und ein Element von y und die miteinander multiplizierst, so erhältst du eine neue Menge welches die resultierende reelle Zahl aus Dedekind-Schmitte darstellt.

Lemma 2.2.1 Bernoullische Ungleichung [Ziltener, 2024]

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, \infty)$ gilt

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx.$$

In einfachen Worten sagt die Bernoullische Ungleichung, dass exponentielles Wachstum stärker oder gleich stark ist wie lineares Wachstum. Diese Gleichung wird vor allem für Beweise von der Konvergenz von Reihen und Folgen verwendet. Meistens wird der Beweis mit Induktion durchgeführt.

Definition 2.2.3: b-adischer Bruch [Ziltener, 2024]

Sei $b \leq 2$. Ein b-adischer Bruch ist Abbildung $a : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, \dots, b - 1\}$, oder das Negative einer solchen Abbildung, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$, sodass für jedes $i > k$ gilt $a_i := a(i) = 0$.

(b) Es gibt keine Zahl $i \in \mathbb{Z}$, sodass für jedes $i \leq l$ gilt $a_i = b - 1$.

Wir definieren

$$R_b := \{\text{b-adischer Bruch}\}.$$

Der b -adischer Bruch ist einfach gesagt eine Art, um eine reelle Zahl darzustellen. b ist die Basis und zeigt mit welchen Zahlen die reelle Zahl dargestellt werden kann. (10 = Dezimalsystem) Dabei gilt, dass der b -adischer Bruch laut (a) nach links alle Elemente eventuell Null sein werden, jedoch laut (b) nach rechts nicht die gleiche Zahl wiederholen dürfen. Dadurch werden Zahlen eliminiert, welche einfach aufgerundet werden können.

Definition 2.2.4: Ordnung von b -adischer Brüchen [Ziltener, 2024]

Wir definieren $<_b$ als die strikte lexikographische Ordnung auf \mathbb{R}_b . d.h. für $a, a' \in \mathbb{R}_b$ definieren wir

$$a <_b a' := \exists n \in \mathbb{Z} (\forall i > n : a_i = a'_i) \wedge a_n < a'_n.$$

Wir definieren

$$a \leqslant_b a' := a = a' \vee a <_b a'.$$

Die obige definition sagt einfach aus, dass man die Zahlen einer reellen Zahl ausgedrückt als ein b -adischer Bruch von links nach rechts vergleicht. Sobald die Zahl a kleiner ist als a' so ist die Zahl grösser zur Basis b . Dabei ist einfach wichtig, dass die vorherigen Zahlen gleich sind.

Definition 2.2.5: Betrag [Ziltener, 2024]

Der (Absolut-) Betrag einer Zahl ist die Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hoffentlich ist der Betrag einer Zahl allen bekannt. Diese Definition ist einfach formell und sagt aus, dass wenn die Zahl x positiv ist so ist deren Betrag die Zahl selbst und sonst ist es $-x$, da das negative einer negativen Zahl eine positive Zahl ergibt.

Mit dem Betrag können 2 Sätze eingeführt werden, welche für Beweise sehr nützlich sind.

Satz 2.2.1 Dreiecks-Ungleichung [Ziltener, 2024]

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Satz 2.2.2 Youngsche Ungleichung [Ziltener, 2024]

Es seien $x, y, c \in \mathbb{R}$, sodass $c > 0$. Dann gilt

$$2|xy| \leqslant cx^2 + \frac{y^2}{c}.$$

2.3 Supremum und Infimum

Definition 2.3.1: Schranke, Beschränktheit [Ziltener, 2024]

Sei $A \subset \mathbb{R}$.

- Eine obere Schranke für A ist eine Zahl $b \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $a \in A$ gilt $a \leq b$.
- A heisst nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine obere Schranke für A gibt.
- Die Begriffe untere Schranke und nach unten beschränkt sind analog definiert.
- A heisst beschränkt genau dann, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Gehen wir die einzelnen Punkte der Definition durch. Der erste Punkt besagt, dass eine Menge von Zahlen A eine Zahl hat, welche \geq der grössten Zahl in der Menge ist. Dies bedeutet, dass die grösste Zahl der Menge diese Zahl ist oder sie annähert. Dieser wird "obere Schranke" genannt. Obwohl es mehrere Zahlen sein können ist es keine Menge.

Punkt zwei sagt aus, dass eine Menge nach oben beschränkt ist, wenn es eine obere Schranke hat.

Punkt drei definiert die obere Schranke gleich der unteren Schranke. Dies bedeutet, dass eine Menge von Zahlen A eine Zahl hat, welche \leq die kleinste Zahl der Menge ist. Dies bedeutet wiederum, dass die kleinste Zahl der Menge diese Zahl ist oder sie annähert. Auch hier gilt wieder, dass mehrere Zahlen die obere Schranke sein können, jedoch die obere Schranke keine Menge ist. Der letzte Punkt definiert eine beschränkte Menge. Eine beschränkte Menge ist einfach eine Menge, welche nach unten und nach oben beschränkt ist.

Satz 2.3.1 Vollständigkeit der reellen Zahlen [Ziltener, 2024]

- (i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke. (Damit meinen wir ein kleinstes Element der Menge $S := \{-\text{obere Schranke von } A\}$.)
- (ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke.

Wie vorher erwähnt kann eine Menge A mehrere obere oder untere Schranken haben. Der Satz besagt, dass die Menge A , falls sie nicht leer ist eine kleinste obere Schranke haben muss (das grösste Element in der Menge A) und eine grösste untere Schranke. (das kleinste Element der Menge A)

Definition 2.3.2: Supremum, Infimum [Ziltener, 2024]

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Wir definieren das Supremum von A als

$$\sup A := \begin{cases} \text{kleinste obere Schranke für } A, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ nicht nach oben beschränkt ist,} \\ -\infty, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Wir definieren das Infimum von A als

$$\inf A := \begin{cases} \text{grösste untere Schranke für } A, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und } A \text{ nach unten beschränkt ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ nicht nach unten beschränkt ist,} \\ -\infty, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Gehen wir nun die einzelnen Definitionen von Supremum und Infimum durch.

Das Supremum ist im allgemeinen Fall die kleinste obere Schranke. Falls A nicht beschränkt ist, so ist das Supremum ∞ . Falls A zusätzlich noch die leere Menge ist, so ist das Supremum von A $-\infty$.

Beim Infimum ist die grösste untere Schranke der allgemeine Fall. Falls A nicht beschränkt ist, so ist das Supremum $-\infty$. Falls A zusätzlich noch die leere Menge ist, so ist das Infimum von A ∞ .

Grundsätzlich kann man einfach sagen, dass das Supremum und Infimum die Definitionen von Schranken erweitert.

Definition 2.3.3: Maximum, Minimum einer Teilmenge von \mathbb{R} [Ziltener, 2024]

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Maximum von A ist ein Element $a \in A$, sodass $a \geq b$, für jedes $b \in A$. Ein Minimum von A ist ein Element $a \in A$, sodass $a \leq b$, für jedes $b \in A$.

Einfach gesagt ist das Maximum bzw. das Minimum einer Menge das grösste, bzw. das kleinste Element von Menge.

2.4 Komplexe Zahlen

Da wir keine Lösung für $x^2 = 2$ hatten, haben wir die reellen Zahlen eingeführt. Dies werden wir in diesem Kapitel ebenfalls tun, da wir keine Lösung für $x^2 = -1$ haben.

Die Notizen von Herr Ziltner sind nicht sehr nützlich, weshalb ich dieses Kapitel überspringen werde. Ich würde die Notizen von "Mathematische Methoden (frühere Name Komplexe Analysis)" anschauen.

Kapitel 3

Folgen und Reihen

Eine Folge ist eine unendlich geordnete Liste von Zahlen. [Ziltener, 2024] Wenn die Terme einer Folge sich einer Zahl A annähern, so konvergiert die Folge. Die zu einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gehörende Reihe ist die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dies bedeutet nichts anderes als dass eine Folge genommen wird und eine neue Folge erstellt wird, bei der jeder Term die Summe der Terme der ursprünglichen Folge bis zu diesem Punkt ist.

3.1 Folgen und Grenzwerte davon

Definition 3.1.1: Folge [Ziltener, 2024]

Eine komplexe Zahlenfolge (oder kurz Folge) ist eine Funktion

$$a : \mathbb{N}_N := \{n \in \mathbb{N} | n \leq N\} \rightarrow \mathbb{C},$$

wobei $N \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben

$$a_n := a(n), (a_n) := (a_n)_{n \in \mathbb{N}_n} := a.$$

Wir nennen n den Folgenindex und a_n das n -te Folgenglied.

Diese Definition ist sehr formell. Die Definition sagt nichts anderes aus als das die Reihe eine Funktion ist, welche die natürlichen Zahlen von N bis unendlich nimmt und dabei eine komplexe Zahl entsteht. ($a_1 = 2$) Des Weiteren sagt die Definition aus, dass man anstelle von $a(n)$ a_n schreiben kann und anstelle von der Funktion, welches (a_n) als Input nimmt a schreiben kann.

Der Grund weshalb wir eine Folge als eine Funktion definieren ist, weil wir dann bestimmte "Werkzeuge" verwenden können. (dom, codom, etc.)

Bemerkung:-

Wir definieren neue Folgen, ausser ausdrücklich gesagt, mit dem Startindex 0.

Definition 3.1.2: Konvergenz, Grenzwert einer Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} [Ziltener, 2024]

- (i) Sei $A \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine komplexe Zahlenfolge. Wir sagen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen A konvergiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \epsilon \in (0, \infty) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| \leq \epsilon.$$

Wir verwenden dafür die Notationen

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \rightarrow A, a_n \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

und sagen auch:

” a_n konvergiert gegen A für n gegen unendlich.”

Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \rightarrow A$, dann nennen wir A den Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und schreiben dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \in \mathbb{N}_0} (a_n) := A.$$

- (ii) Wir sagen, dass eine Folge konvergiert genau dann, wenn es eine komplexe Zahl gibt, wogegen die Folge konvergiert. Andernfalls sagen wir, dass die Folge divergiert.

In einfachen Worten gesagt bedeutete dies, dass eine Folge konvergiert, wenn man ein Element n_0 in der Folge finden kann, so dass alle Elemente danach innerhalb ϵ sind. Sobald die Folge gegen A konvergiert, so ist auch A der Grenzwert der Folge. Falls die Folge nicht konvergiert divergiert die Folge.

3.2 Konvergenzkriterien

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass wir zeigen können, dass eine Folge konvergiert, wenn wir ein Element wählen und dann zeigen können, dass die darauf folgenden Elemente in einem bestimmten Bereich (ϵ) bleibt. Dies kann sehr aufwendig sein, da man im Voraus wissen muss, zur welcher Zahl die Folge konvergiert. Anhand von dieser Information muss man das Element bestimmen, deren darauffolgenden Elemente im ϵ -Bereich bleibt. Im ersten Augenblick kann es einfach erscheinen. Bedenke aber, dass ϵ beliebig klein gewählt werden kann. Zum Glück gibt es Kriterien, welche dieses Problem vereinfachen.

Definition 3.2.1: Obere und untere Beschränktheit, monotonen Wachstum [Ziltener, 2024]

Wir nennen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nach oben (unten) beschränkt genau dann, wenn die Menge $\{a_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ nach oben (unten) beschränkt ist.

- Wir nennen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend (fallend) genau dann, wenn gilt

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots (a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots).$$

Die obige Definition ist ein wenig blöd geschrieben, sagt aber nichts anderes aus als dass es eine Folge nach oben oder unten beschränkt, sobald es eine Zahl gibt, die sich annähert oder die Elemente der Folge gleich der Zahl sind. Des Weiteren gilt, dass eine Folge monoton wachsend oder fallend ist, wenn die darauffolgenden Elemente eines beliebigen Elementes der Folge grösser, bzw. kleiner oder gleich sind.

Satz 3.2.1 Monotoniekriterium [Ziltener, 2024]

- (i) Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} a_n := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
- (ii) Jede nach unten beschränkte und monoton fallende reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\inf_{n \in \mathbb{N}_0} a_n := \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}_0\}$.

Dieser Satz ist die Kernidee zu unserem Problem. Jede Folge, welche monoton wachsend bzw. monoton fallend ist

und nach oben bzw. nach unten beschränkt ist konvergiert gegen eine Zahl. Diese Zahl ist das Supremum, bzw. das Infimum der Folge. Dieser Satz ist sehr aussagekräftig, weshalb es für viele Beweise verwendet wird.

Satz 3.2.2 Konvergenz erhalten unter Summe, Produkt und Quotient, Ordnung im Limes enthalten [Ziltener, 2024]

Seien $A, B \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, die gegen A konvergiert, und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, die gegen B konvergiert. Dann gilt das Folgende:

- (i) (Summe) Die Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $A + B$.
- (ii) (Produkt) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $A \cdot B$.
- (iii) (Quotient) Falls $B \neq 0$ und $b_n \neq 0$, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dann konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $\frac{A}{B}$.
- (iv) (Ordnung im Limes enthalten) Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ reelle Folgen sind und dass $a_n \leq b_n$, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $A \leq B$.

Dies ist einer der wichtigsten Sätze in der Analysis und beschreibt die Konvergenz von zwei Folgen, welche miteinander addiert, multipliziert und dividiert wurde. Einfach gesagt, wenn zwei Folgen miteinander addiert werden, so werden die Grenzwerte miteinander addiert. Bei der Multiplikation multipliziert und bei der Division dividiert. Weiterhin ist zu beachten, dass der Grenzwert von einer kleineren Folge nicht unbedingt kleiner sein muss als der Grenzwert einer grösseren Folge.

Bemerkung:-

Bei der Subtraktion von Folgen konvergiert die neue Folge $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $A - B$.

Definition 3.2.2: Eulerische Zahl [Ziltener, 2024]

Wir definieren die Eulersche Zahl als den Grenzwert

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Diese Zahl ist nach Leonhard Euler benannt.

Bemerkung:-

Die eulerische Zahl e ist nicht periodisch.

3.3 Limes superior und inferiorm Folgen in \mathbb{R}^d , Cauchy-Kriterium

Bevor wir den Limes Superior und Inferior definieren können, müssen wir die erweiterte reelle Zahlengerade definieren.

Definition 3.3.1: erweiterte reelle Zahlengerade [Ziltener, 2024]

Wir definieren die erweiterte reelle Zahlengerade als die Menge

$$[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Wir definieren nichts weiter als, dass die erweiterte reelle Zahlengerade alle Zahlen zwischen $-\infty$ und ∞ , was auch die Vereinigung von den \mathbb{R} und die menge von $\{-\infty, \infty\}$ ist.

Definition 3.3.2: uneigentliche Konvergenz, uneigentlicher Grenzwert [Ziltener, 2024]

- (i) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $[-\infty, \infty]$. Wir nennen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bestimmt divergent gegen ∞ genau dann, wenn

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq C.$$

In diesem Fall nennen wir ∞ den uneigentlichen Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und schreiben

$$\lim(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = \infty.$$

- (ii) Wir definieren bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ und den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$ analog.

Der erste Punkt der vorherigen Definition sagt nichts weiteres aus, als dass eine Folge bestimmt divergent ist, wenn ein Element der Folge grösser ist als eine beliebige reelle Zahl. Dadurch wissen wir, dass die Folge gegen ∞ wächst und deren uneigentlicher Grenzwert ∞ ist.

Der zweite Punkt besagt, dass die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$, sowie der uneigentliche Grenzwert $-\infty$ analog zur bestimmten Divergenz gegen ∞ bzw. der uneigentliche Grenzwert ∞ definiert werden kann.

Definition 3.3.3: bestimmte Divergenz gegen $-\infty$, uneigentlicher Grenzwert $-\infty$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $[-\infty, \infty]$. Wir nennen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bestimmt divergent gegen $-\infty$ genau dann, wenn

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq C.$$

Des weiteren bemerkt man, dass in der Definition von Herr Ziltener die uneigentliche Konvergenz nicht explizit definiert wird. Man kann es sich aber wie folgt vorstellen: die eigentliche Konvergenz ist, wenn eine Folge bestimmt gegen eine reelle Zahl divergiert. Sobald eine Folge bestimmt gegen ∞ oder $-\infty$ konvergiert, so ist dies eine uneigentliche Konvergenz.

Definition 3.3.4: Limes superior und inferior [Ziltener, 2024]

- (i) Wir definieren den Limes superior von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \limsup_{n \in \mathbb{N}_0} (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq n} a_i \in [-\infty, \infty].$$

- (ii) Wir definieren den Limes inferior von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \liminf_{n \in \mathbb{N}_0} (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq n} a_i \in [-\infty, \infty].$$

In einfachen Worten gesagt ist der Limes superior der grösste Wert, welche die Folge sich annähert bzw. unendlich oft annähert, falls die Folge oszilliert. Der Limes inferior ist der kleinste Wert, welche die Folge annähert bzw. unendlich oft annähert.

Der Limes superior bzw. inferior wird deswegen auch Häufungspunkte genannt.

Bemerkung:-

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n$$

Definition 3.3.5: Konvergenzm Grenzwert einer Folge in \mathbb{R}^d [Ziltener, 2024]

Wir sagenm dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen A konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \epsilon(0, \infty) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \|a_n - A\| \leq \epsilon.$$

In diesem Fall nennen wir A den Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

In Kapitel 3.1 haben wir gesehen, dass eine Folge konvergiert sobald ein Teil seiner Elemente sich in einem ϵ

befinden. Wir haben nun die Definition auf mehrere Dimensionen erweitert. Wenn man ein beliebiges Element n_0 einer Folge wählt und ein ϵ findet, welches der Radius vom Ball um A ist und dieser Ball alle darauffolgenden Elemente von n_0 umschließt, so konvergiert die Folge gegen A . Somit ist A der Grenzwert oder Limes von der Folge.

Definition 3.3.6: Cauchy-Folge [Ziltener, 2024]

Eine komplexe Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heisst Cauchy-Folge genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in (0, \infty) \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m, n \in \mathbb{N}_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \epsilon.$$

Die Cauchy-Folge ist eine Folge, bei der der Abstand der Folgenglieder mit zunehmenden Folgeindex immer kleiner werden.

3.4 Reihen

Definition 3.4.1: Reihe [Ziltener, 2024]

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die n -te Partialsumme der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ als die Summe

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n.$$

Wir definieren die zu $(a_k)_k \in \mathbb{N}_0$ gehörende Reihe (oder Folge der Partialsummen) als die Folge

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Falls diese Folge konvergiert, dann definieren wir

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots &:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \\ &:= \lim_{n \in \mathbb{N}_0} (s_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \end{aligned}$$

In einfachen Worten gesagt ist eine Reihe eine Folge, bei denen die Elemente die Partialsummen bis zum n -ten Elemente der ursprünglichen Folge ist. ($s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, \dots$) Eine Reihe konvergiert, sobald die Partialsummen sich einer Zahl annähern wie bei einer "normalen" Reihe.

Da eine Reihe eine Folge ist, gelten dieselben Konvergenzkriterien von Folgen auch für Reihen.

Bemerkung:-

- Falls die Reihe $\left(s_n = \sum_{k=0}^n a_k\right)$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gegen 0. [Ziltener, 2024]

Satz 3.4.1 Quotientenkriterium für die Konvergenz einer Reihe [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass $a_k \neq 0$, für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1.$$

(ii) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ divergiert, falls

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1.$$

Der Satz sagt besagt, dass wenn, je weiter man in die Reihe fortschreitet (wenn k gegen unendlich geht), das Verhältnis des Absolutbetrags des nächsten Elements zum aktuellen Element schliesslich unter 1 bleibt, dann konvergiert die Reihe. Wenn, je weiter man in die Reihe fortschreitet (wenn k gegen unendlich geht), das Verhältnis des Absolutbetrags des nächsten Elementes zum aktuellen Element schliesslich über 1 bleibt, dann divergiert die Reihe.

Bemerkung:-

Falls $\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ dann ist es unklar ob die Reihe konvergiert oder divergiert. Genau dasselbe gilt, wenn die Reihe oszilliert.

Definition 3.4.2: Exponentialreihe [Ziltener, 2024]

Wir definieren die Exponentialreihe zu z als die zur Folge $\left(a_k := \frac{z^k}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die als die Folge $\left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Die obige Definition definiert nichts weiter als $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$. Die nächste Definition macht mehr oder weniger dasselbe, bloss auf einer sehr formellen Ebene.

Definition 3.4.3: komplexe Exponentialfunktion [Ziltener, 2024]

Wir definieren die (komplexe) Exponentialfunktion als die Funktion

$$\text{Exp} := \exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

Satz 3.4.2 Wurzelkriterium für die Konvergenz einer Reihe [Ziltener, 2024]

(i) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1.$$

(ii) Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ divergiert, falls

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

Das Wurzelkriterium wird verwendet, um oszillierende Reihen, bzw. Reihen deren Quotientenregel 1 ergibt ihre Konvergenz bzw. Divergenz zu beweisen. Falls ab einem Element der Reihe $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ so konvergiert die

Reihe. Ist $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ so divergiert die Reihe.

Definition 3.4.4: Potenzreihe, Konvergenzbereich, -Radius, -Kreisscheibe
[Ziltener, 2024]

(i) Wir definieren die zu $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörige (komplexe) Potenzreihe als die Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \left(\sum_{k=0}^n c_k z^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \{\text{Folge in } \mathbb{C}\}.$$

Wir nennen c_k den k -ten Koeffizienten der Potenzreihe.

(ii) (Konvergenzbereich) Wir definieren:

$$\begin{aligned} &\text{Konvergenzbereich der Potenzreihe } z \mapsto \left(\sum_{k=0}^n c_k z^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0} \\ &:= \text{zur Koeffizientenfolge } (c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ gehörigen Konvergenzbereich} \\ &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left(\sum_{k=0}^n c_k z^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ konvergiert} \right\}, \end{aligned}$$

(iii) (Konvergenzradius) Wir definieren:

$$\begin{aligned} &\text{Konvergenzradius der Potenzreihe } z \mapsto \left(\sum_{k=0}^n c_k z^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0} \\ &:= \text{zur Koeffizientenfolge } c = (c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ gehörigen Konvergenzradius} \\ &:= \rho \\ &:= \rho_c \\ &:= \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

(iv) (Konvergenzkreisscheibe) Wir definieren:

$$\begin{aligned} &\text{Konvergenzkreisscheibe der Potenzreihe } z \mapsto \left(\sum_{k=0}^n c_k z^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0} \\ &:= \text{zur Koeffizientenfolge } (c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ gehörige Konvergenzkreisscheibe} \\ &:= B_\rho^2(0) \end{aligned}$$

Bemerkung:-

Im Vergleich zu den Notizen von Herr Ziltener habe ich die Definitionen von Konvergenzbereich, Konvergenzradius und Konvergenzradius in separate Punkte genommen, um es übersichtlicher zu machen und damit man einfacher durch die Punkte gehen kann.

Was ist eine Potenzreihe? Eine Potenzreihe kann man sich vorstellen wie eine unendlich lange Potenzfunktion. c_k ist jeweils der Parameter vor der gesuchten variablen z mit der k -ten Potenz. $(c_2 \cdot z^2 + c_1 \cdot z + c_0)$

Der Konvergenzbereich kann man sich wie ein offener Ball vorstellen. Dieser Ball besteht aus komplexen Zahlen, die, wenn in die Potenzreihe eingesetzt, eine komplexe Zahl wieder ausgibt als Lösung. Die eingesetzten komplexe Zahlen können gleich der Lösung sein (Fixpunkt), müssen aber nicht.

Der Konvergenzradius ist der Radius vom offenen Ball, welcher den Konvergenzbereich einschliesst. Dabei haben wir bestimmte Regeln.

1. Wenn der Konvergenzradius $\rho = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur bei $z = 0$.
2. Wenn der Konvergenzradius $\rho = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe für alle z .

Die Konvergenzkreisscheibe ist der offene Ball, welcher den Konvergenzbereich mit den Konvergenzradius einschliesst aber der Konvergenzbereich muss nicht zwingend komplett eingeschlossen sein. Was ist der Unterschied zwischen den beiden Terminologien? Der Konvergenzbereich kann Punkte auf der Sphäre des offenen Balls haben, welche die dom der Potenzreihe sind. Da die Sphäre komplexe Zahlen enthalten kann, welche nicht dom von der Potenzreihe sind, wird diese ausgeschlossen.

Satz 3.4.3 Konvergenzbereich einer Potenzreihe, Konvergenzradius [Ziltener, 2024]

- (i) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n c_k z^k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| < \rho$.
- (ii) Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n c_k z^k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$, sodass $|z| > \rho$.

Dieser Satz sagt nichts Weiteres aus als, dass alle Punkte innerhalb der Konvergenzkreisscheibe mit Konvergenzradius ρ die dom von der Potenzreihe sind, was dazu führt, dass die Potenzreihe konvergiert. Alles ausserhalb der Konvergenzkreisscheibe lässt die Potenzreihe divergieren oder oszillieren.

Definition 3.4.5: alternierende Folge, alternierende Reihe [Ziltener, 2024]

Wir nennen die zu $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ alternierend genau dann, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (-1)^k a_k \geq 0 \quad \text{oder} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : (-1)^k a_k \leq 0$$

Wir nennen die zu $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe alternierend genau dann, wenn $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ alternierend ist.

Die obige Definition ist eine sehr formelle Art und Weise eine alternierende Folge bzw. Reihe zu beschreiben. Einfach gesagt ist eine Folge oder Reihe alternierend, wenn alle Elemente mit einem ungeraden Index grösser 0 sind und alle Elemente mit einem geraden Index kleiner 0 sind. Es kann natürlich auch umgekehrt sein.

Satz 3.4.4 Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen [Ziltener, 2024]

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge in \mathbb{R} , die gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die zu $((-1)^k a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also Folge $\left(s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Der obere Satz sagt aus, dass wenn man aus den Beträgen von den Elementen einer alternierenden Reihe eine neue Reihe bildet und dies monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die alternierende Reihe.

3.5 Absolute Summierbarkeit einer Folge, absolute Konvergenz einer Reihe

Definition 3.5.1: absolut summierbar, absolut konvergent [Ziltener, 2024]

Wir nennen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ absolut summierbar genau dann, wenn die zu $(||a_k||)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(\sum_{k=0}^n ||a_k||\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert.

In diesem Fall nennen wir die zu $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge $\left(\sum_{k=0}^n ||a_k||\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$, absolut konvergent.

Die Definition sagt nichts Weiteres aus, als dass wenn man aus der ursprünglichen Folge eine Reihe bildet beste-

hend aus der euklidischen Norm der Elemente der Folge $\left(\sum_{k=0}^n \|a_k\| \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und diese Reihe konvergiert, so ist die Folge absolut summierbar.

Falls die Folge absolut summierbar ist, dann ist die Reihe, welche aus der Folge gebildet wird absolut konvergent.

Satz 3.5.1 absolute Summierbarkeit und Umordnung [Ziltener, 2024]

Falls die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ absolut summierbar ist, dann konvergiert für jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ die zur Folge $(a_{\varphi(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, und es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{\varphi(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Einfach gesagt sagt der Satz aus, dass wenn man die Elemente einer absolut summierbaren Reihe nimmt und eine neue Reihe bildet, welche nicht die gleiche Reihenfolge hat, dann ist die Summe der ursprünglichen und der neuen Reihe gleich. Dies bedeutet auch, dass die neue Reihe konvergiert.

Definition 3.5.2: Faltung und Cauchy-Produkt [Ziltener, 2024]

- (i) Wir definieren die Faltung (oder das Faltungsprodukt) von a und b als die Folge

$$a * b : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C} \quad (a * b)_m := (a * b)(m) := \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0 : k+l=m} a_k b_l = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$$

- (ii) Wir definieren das Cauchy-Produkt der zu a und b gehörigen Reihen als die zur gefalteten Folge $a * b$ gehörige Reihe, also

$$\text{Cauchy-Produkt von } \left(\sum_{k=0}^K a_k \right)_{K \in \mathbb{N}_0} \text{ und } \left(\sum_{l=0}^L b_l \right)_{L \in \mathbb{N}_0} := \left(\sum_{m=0}^M (a * b)_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right)_{M \in \mathbb{N}_0}.$$

In einfachen Worten gesagt ist die Faltung eine neue Folge. Jedes Element dieser neuen Folge entsteht, indem man Produkte von Elementen der beiden ursprünglichen Folgen summiert. Dabei ist die Summe so gebildet, dass die Indizes der multiplizierten Elemente sich immer zum Index des neuen Elements addieren.

Das Cauchy-Produkt zweier Folgen ist eine Reihe, deren Elemente die Summe der Faltungen der Folgen sind.

Satz 3.5.2 Cauchy-Produkt zweier Reihen [Ziltener, 2024]

Seien $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $b = (b_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ absolut summierbare Folgen in \mathbb{C} . Dann ist die Faltung $a * b$ absolut summierbar, und es gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a * b)_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n (a * b)_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l.$$

Der obige Satz sagt nichts Weiteres aus als, dass falls zwei Folgen absolut summierbar sind, dann ist die Reihe, welche durch die Faltung der beiden Folgen entsteht absolut summierbar. Des Weiteren gilt, dass die Summe der Faltung der Folgen genau gleich den Produkten der Reihen ist.

3.6 Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus

In Kapitel 3.2 haben wir die eulerische Zahl e definiert. Mit dieser Zahl können wir die Exponentialfunktion definieren.

Definition 3.6.1: Exponentialfunktion

Sei $x \in \mathbb{Q}$. Die Exponentialfunktion ist definiert als

$$e^x = \exp(x).$$

In diesem Kapitel werden wir die Definition erweitern mit komplexen Potenzen.

Definition 3.6.2: komplexe Potenz von e [Ziltener, 2024]

Wir definieren

$$e^z := \exp(z).$$

Mit der komplexen Exponentialfunktion können wir nun einen Zusammenhang zur Kosinus- und Sinusfunktion bilden.

Definition 3.6.3: Kosinus- und Sinusreihe [Ziltener, 2024]

Wir definieren die Kosinusreihe zu z als die zur Folge $\left(\frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}\right)_{j \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge

$$\left(\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}\right)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

Wir definieren die Sinusreihe zu z als die zur Folge $\left(\frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)_{j \in \mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe, also die Folge

$$\left(\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

Bemerkung:-

Die Kosinus- und Sinusreihe konvergiert laut dem Quotientenkriterium.

Bemerkung:-

Cos und Sin mit grossen Anfangsbuchstaben sind die Kosinus- bzw. Sinusreihe gemeint.

Kapitel 4

Stetigkeit, Topologie

4.1 Stetigkeit

Seien $n, n' \in \mathbb{N}, S \subseteq \mathbb{R}^n, S' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ und $f : S \rightarrow S'$ eine Funktion.

Definition 4.1.1: Stetigkeit [Ziltener, 2024]

- (i) Sei $x_0 \in S$. f heisst an der Stelle x_0 stetig genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in (0, \infty) \exists \delta \in (0, \infty) \forall x \in S : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \epsilon.$$

- (ii) f heisst stetig genau dann, wenn an jeder Stelle seines Definitionsbereiches stetig ist.

Gehen wir die einzelnen Punkte der obigen Definition durch. Wir wählen ein x_0 , welches $\text{dom}(f)$ ist und einen weiteren x , welches einen Abstand $\leq \delta$ zu x_0 hat. Wenn $\mathfrak{I}(f)$ von x_0 und x einen Abstand $\leq \epsilon$ hat, so wissen wir, dass die Funktion an Punkt x_0 stetig ist. Falls alle Punkte der Funktion stetig sind, so ist die komplette Funktion stetig.

Bemerkung:-

Die Funktion f ist an der Stelle x_0 unstetig, d.h. nicht stetig genau dann, wenn gilt

$$\exists \epsilon \in (0, \infty) \forall \delta \in (0, \infty) \exists x \in S : \|x - x_0\| \leq \delta \wedge \|f(x) - f(x_0)\| > \epsilon.$$

[Ziltener, 2024]

In anderen Worten: Falls die Funktion eine Stelle hat an denen der Wert sprunghaft sich ändert, so ist die Funktion nicht stetig.

Satz 4.1.1 Stetigkeit, Rechenoperationen, Komponenten [Ziltener, 2024]

- (i) Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen sind stetige Funktionen.
- (ii) Seien $n \in \mathbb{N}, S \subseteq \mathbb{R}^n, f, g, : S \rightarrow \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}$ und $x_0 \in \mathbb{C}$, sodass f und g in x_0 stetig sind. Dann sind die Funktionen $|f + g|, |a \cdot f|, |f \cdot g|$ in x_0 stetig. Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig. (Diese Funktion ist auf der Menge aller $x \in S$ definiert, wofür $g(x) \neq 0$.)
- (i) Seien $n, n' \in \mathbb{N}, S \subseteq \mathbb{R}^n, S' \subseteq \mathbb{R}^{n'}, f = (f_1, \dots, f_{n'}) : S \rightarrow S'$ und $x_0 \in S$. Die Funktion f ist in x_0 stetig genau dann, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n'\}$ die Funktion f_i in x_0 stetig ist.

Der obige Satz sagt nichts weiteres aus, als dass Rechenoperationen in den komplexen Zahlen stetig sind. Des Weiteren sind Rechenoperationen von stetigen Funktionen ebenfalls an Punkt x_0 stetig. Schlussendlich ist eine Funktion f bestehend aus Vektoren nur dann stetig, wenn jeder Vektor der Funktion f in x_0 stetig ist.

Definition 4.1.2: Polynom in mehreren Veränderlichen [Ziltener, 2024]

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Polynom (auf \mathbb{R}^n) genau dann, wenn sie eine (endliche) Linearkombination von Funktionen der Form

$$x \mapsto x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

ist, wobei $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$. (x_i bezeichnet die i -te Komponente von $x \in \mathbb{R}^n$.) Der Grad des Polynoms f ist die grösste Zahl $a_1 + \dots + a_n$, sodass der Term $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ in f (mit einem nichtverschwindenden Koeffizienten) auftritt.

Wir definieren nun in einfachen Worten gesagt die Polynomfunktion. Eine Funktion wird als eine Polynomfunktion bezeichnet, wenn sie als eine Summe von Termen der Form $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ geschrieben werden kann. $x_1 \dots x_n$ sind Monome und sind die Elemente eines Vektors und können aus beliebig vielen Variablen bestehen. (x, xy, zxy , etc.) x_i ist die i -te Komponente des Vektors. a_i ist die Potenz und kann eine positive Zahl inklusive 0 sein. Wichtig zu erwähnen ist noch, dass der Grad der Polynomfunktion die grösste Summe der Potenzen eines Monoms ist.

Bemerkung:-

Verknüpfte Funktionen, welche in x_0 stetig sind, sind verknüpft auch stetig.

Bemerkung:-

Die Wurzelfunktion ist stetig.

Bemerkung:-

Eine Funktion, welche durch eine Potenzreihe definiert ist, ist stetig.

4.2 Topologie, innerer Punkt, Inneres, Offen- und Abgeschlossenheit einer Menge, Rand, Konvergenz einer Funktion an einer Stelle

Dieses Kapitel ist sehr ähnlich zum Kapitel 1.2.2. In diesem Kapitel werden wir die Topologie von Mengen besprechen.

Die Topologie beschreibt im Wesentlichen, ob eine Menge zusammenhängend ist oder nicht. Wir werden später im Kapitel sehen, was dies bedeutet.

Definition 4.2.1: innerer Punkt, Inneres, Offenheit [Ziltener, 2024]

- (i) Ein Punkt $x \in S$ heisst innerer Punkt von S genau dann, wenn es ein $r \in (0, \infty)$ gibt, sodass

$$B_r^n(x) \subseteq S.$$

Wir definieren $\text{Int } S$, das Innere von S (oder den offenen Kern von S), als die Menge aller ihrer inneren Punkte,

$$\text{Int } S := \text{Int}(S) := S^\circ := \{\text{innerer Punkt von } S\}.$$

- (ii) S heisst offen (in \mathbb{R}^n) genau dann, wenn jeder Punkt von S ein innerer Punkt ist.

Bemerkung:-

Das Innere von S ist in S enthalten.

$$\text{Int } S \subseteq S.$$

[Ziltener, 2024]

Ein innerer Punkt ist ein Punkt x dessen offener Ball (Ball ohne Rand) mit einem beliebig gewählten Radius sich innerhalb der Menge S befindet. Das Innere einer Menge ist ein verallgemeinerter offener Ball. Die Menge muss nicht einen Radius haben, sondern kann ein beliebig geformte Menge sein.

In der vorherigen Definition wird auch die offene Menge erwähnt. Die offene Menge besteht nur aus inneren Punkten, also Punkte, deren offener Ball sich innerhalb der Menge S befindet.

Definition 4.2.2: Vereinigung, Durchschnitt [Ziltener, 2024]

Sei \mathcal{S} eine Kollektion, also eine Menge von Mengen.

- (i) Wir definieren $\bigcup \mathcal{S}$, die Vereinigung von \mathcal{S} (oder Vereinigungsmenge von \mathcal{S} oder Vereinigung aller Elemente von \mathcal{S}) als die Menge aller Objekte, die Element (mindestens) eines Elementes von \mathcal{S} sind, d.h.

$$\bigcup \mathcal{S} := \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S := \{x | \exists S \in \mathcal{S} : x \in S\}.$$

- (ii) Wir nehmen jetzt an, dass \mathcal{S} nicht leer ist. Wir definieren $\bigcap \mathcal{S}$, den (Durch-)Schnitt von \mathcal{S} (oder Schnittmenge von \mathcal{S} oder Schnitt aller Elemente von \mathcal{S}) als die Menge aller Objekte, die Element aller Elemente von \mathcal{S} sind, d.h.

$$\bigcap \mathcal{S} := \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S := \{x | \forall S \in \mathcal{S} : x \in S\}.$$

Die Vereinigung einer Kollektion $\bigcup \mathcal{S}$ kann man verstehen als die Gruppierung von allen Elementen (also Mengen) der Kollektion zu einer neuen Menge. Beachte dabei, dass Elemente sich nicht wiederholen können.

Der Schnitt einer Kollektion $\bigcap \mathcal{S}$ kann man verstehen als die Gruppierung von den Elementen der Mengen der Kollektion zu einer neuen Menge, bei der die Elemente in allen Mengen der Kollektion vorkommt.

Satz 4.2.1 Eigenschaften offener Mengen [Ziltener, 2024]

Es gilt:

- (i) \emptyset, \mathbb{R}^n sind offen in \mathbb{R}^n .
- (ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
- (iii) Jede Vereinigung offener Mengen ist offen.

Definition 4.2.3: Abgeschlossenheit [Ziltener, 2024]

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst abgeschlossen (in \mathbb{R}^n) genau dann, wenn ihr Komplement $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Eine Menge ist abgeschlossen, wenn die Menge bestehend aus den Punkten ausserhalb der ursprünglichen Menge offen ist.

Bemerkung:-

Die Eigenschaften abgeschlossener Mengen entspricht auch den Eigenschaften offener Mengen.

Definition 4.2.4: Abschluss [Ziltener, 2024]

Wir definieren den Abschluss von S als den Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von S .

$$\bar{S} := \text{clos}(S) := \bigcap_{A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen: } S \subseteq A} A.$$

Einfach gesagt ist der Abschluss einer Menge die kleinste Obermenge, welche die Ursprüngliche Menge einschliesst. Diese kleinste Obermenge besteht aus der Schnittmenge aller Obermengen, welche die ursprüngliche Menge einschliesst.

Satz 4.2.2 Charakterisierung des Inneren und des Abschlusses [Ziltener, 2024]

Für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

- (i) Das Innere von S ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von S ,

$$\text{Int}S = S^\circ = \bigcup_{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen } U \subseteq S} U.$$

- (ii) Der Abschluss von S ist gegeben durch

$$\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \text{Folge in } S : x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)\}.$$

Wir haben gelernt, dass das Innere einer Menge alle Punkte innerhalb von der Menge ausser dem Rand sind. Diese Definition können wir auf eine Obermenge erweitern. Das Innere einer Obermenge ist die Vereinigung aller offenen Mengen, welche sich innerhalb der Obermenge befinden.

Der Abschluss kann man sich vorstellen wie der Konvergenzbereich. (Kapitel 3.4) Anstelle das man nur das Innere des Konvergenzbereiches und ein paar Punkte auf den Rand miteinbezieht, sind auch die Punkte auf den Rand, welche nicht im Konvergenzbereich sind mitenthalten.

Definition 4.2.5: Rand [Ziltener, 2024]

Wir definieren ∂S , den (topologischen) Rand von S als das Komplement des Inneren von S im Abschluss von S ,

$$\partial S := \bar{S} \setminus \text{Int}S.$$

In anderen Worten ist der Rand von einer Menge ∂S nichts weiter als der Abschluss ohne das Innere.

Definition 4.2.6: Konvergenz und Grenzwert einer Funktion [Ziltener, 2024]

Wir sagen, dass die Funktion f an der Stelle x_0 gegen y_0 konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in (0, \infty) \exists \delta \in (0, \infty) \forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \epsilon.$$

In diesem Fall nennen wir y_0 den Grenzwert von f an der Stelle x_0 und wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) := \lim_{x_0} f := y_0.$$

Die obige Definition wird umgangssprachlich auch das Epsilon-Delta Kriterium genannt. Es besagt, dass wenn wir eine beliebige (noch so kleine) Toleranzgrenze (ϵ) für die Ausgabe $f(x)$ um den potentiellen Grenzwert y_0 festlegen (d.h., wir definieren ein Intervall/Ball um y_0 der Größe ϵ), dann müssen wir immer in der Lage sein, eine passende Annäherungsgrenze (δ) für die Eingabe x um x_0 zu finden (d.h., wir definieren einen Ball um x_0 der Größe δ), sodass für JEDES x innerhalb dieses δ -Balls (aber ungleich x_0 , falls x_0 nicht zum Definitionsbereich gehört oder es um den Grenzwert an sich geht), der Funktionswert $f(x)$ ZWINGEND innerhalb unserer ursprünglichen ϵ -Toleranz um y_0 liegt.

Falls dies für ein bestimmtes y_0 gilt dann nennen wir y_0 den Limes der Funktion f an der Stelle x_0 .

Bemerkung:-

Falls das Epsilon-Delta Kriterium gilt, so ist die Funktion gleichmässig stetig.

Definition 4.2.7: Beschränktheit [Ziltener, 2024]

Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n heisst beschränkt genau dann, wenn sie in einem abgeschlossenen Ball enthalten ist, der nicht ganz \mathbb{R}^n ist.

In einfachen Worten gesagt ist eine Teilmenge beschränkt, wenn es ein abgeschlossener ist und nicht unendlich gross ist.

Definition 4.2.8: Kompaktheit [Ziltener, 2024]

Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n heisst kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 4.2.3 Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung [Ziltener, 2024]

Das Bild einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ unter einer stetigen Abbildung $f : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist kompakt

Dieser Satz bedeutet nichts anderes als, dass wenn man eine stetige Funktion und eine kompakte Menge hat, welche der dom von f ist so ist der codom von f auch eine kompakte Menge.

4.3 Topologisches Kriterium für Stetigkeit

Definition 4.3.1: relative Offen- und Abgeschlossenheit [Ziltener, 2024]

- (i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst relativ offen in X (oder schlichtweg off in X oder relativ offen) genau dann, wenn es eine offene Teilmenge \tilde{U} von \mathbb{R}^n gibt, sodass $U = \tilde{U} \cap X$.
- (ii) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst relativ abgeschlossen in X genau dann, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge \tilde{A} von \mathbb{R}^n gibt, sodass $A = \tilde{A} \cap X$.

Die obige Definition basiert sozusagen auf die Ansichtsweise. Einfach gesagt kann eine Menge innerhalb einer Teilmenge nicht offen sein, jedoch innerhalb einer anderen Menge schon. Das Gleiche gilt auch für abgeschlossene Mengen. Der Sinn dahinter ist, dass eine Menge in \mathbb{R}^n nicht offen/abgeschlossen ist, jedoch in einer Teilmenge innerhalb \mathbb{R}^n schon.

Definition 4.3.2: Umgebung [Ziltener, 2024]

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst Umgebung von x_0 relativ zu X (oder in X) genau dann, wenn es einen offenen Ball um x_0 gibt, dessen Durchschnitt mit X in U enthalten ist, das heisst es gibt ein $r \in (0, \infty)$, sodass

$$B_r^n(x_0) \cap X \subseteq U.$$

Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir ein solches U auch schlichtweg eine Umgebung von x_0 .

Wenn wir ein Punkt x_0 wählen und ein Ball mit einem Radius r um x_0 bilden und eine Menge wählen U und diese im Ball um x_0 sich befindet, so ist U in der Umgebung von x_0 .

4.4 Zwischenwertsatz und Folgerungen, Stetigkeit der Umkehrfunktion

Satz 4.4.1 Zwischenwertsatz [Ziltener, 2024]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a \leq b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sodass $f(a) \leq f(b)$, und $y \in [f(a), f(b)]$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$, sodass $f(x) = y$.

Der Zwischenwertsatz gilt, wenn eine stetige Funktion für alle x Werte in einem Intervall als dom ein y Wert als Im hat. Zusätzlich gilt, dass der Anfangspunkt kleiner als der Endpunkt vom dom als auch vom Im der Funktion ist.

Definition 4.4.1: strenge Monotonie [Ziltener, 2024]

(i) Wir nennen f monoton wachsend genau dann, wenn für alle $x, x' \in X$ gilt, dass

$$x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

(ii) Wir nennen f streng monoton wachsend genau dann, wenn für alle $x, x' \in X$ gilt, dass

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

In Kapitel 3.2 haben wir schon das monotone Wachstum definiert. Strenge Monotonie beschreibt eine Funktion, dessen Folgenglieder strikt grösser sein müssen.

Bemerkung:-

Falls f streng monoton wachsend ist, dann ist f injektiv. [Ziltener, 2024]

Definition 4.4.2: k-te Wurzelfunktion [Ziltener, 2024]

Für jede gerade Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die k -te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{}$ als die Umkehrfunktion der k -ten Potenzfunktion $p_k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, d.h.

$$\sqrt[k]{} := p_k^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty).$$

Für jede ungerade Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die k -te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{}$ als die Umkehrfunktion der k -ten Potenzfunktion $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h.

$$\sqrt[k]{} := p_k^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sie obige Definition setzt Grenzen für die Wurzelfunktion. Da bei k -ten Wurzelfunktionen mit geraden k eine positive und negative Zahl als Resultat gelten kann, werden nur die positiven Zahlen betrachtet. Bei ungeraden k sind positive und negative Zahlen erlaubt.

Definition 4.4.3: Logarithmus [Ziltener, 2024]

Wir definieren den (natürlichen) Logarithmus \log als die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, d.h.

$$\log := \text{Log} := \exp^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

In Kapitel 3.4 haben wir gelernt, was $\exp()$ ist. Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion von $\exp()$. Einfach gesagt gibt der natürliche Logarithmus die Potenz raus, mit welcher e potenziert werden muss, um diese Zahl zu kriegen.

Bemerkung:-

Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Satz 4.4.2 Stetigkeit der Umkehrfunktion bei kompakten Definitionsbereich [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass f bijektiv und stetig ist und dass K kompakt ist. Dann ist die inverse Funktion $f^{-1} = f^{(-1)} : Y \rightarrow K$ stetig.

In sehr einfachen Worten gesagt ist die Inverse einer Funktion in einem kompakten Intervall stetig, sobald die Funktion selbst stetig und bijektiv ist.

Satz 4.4.3 Bild, strenge Monotonie und Stetigkeit der Umkehrfunktion einer Funktion von einem Intervall nach \mathbb{R} [Ziltener, 2024]

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- (i) Das Bild von f ist ein Intervall.
- (ii) Falls f streng monoton wachsend ist, dann ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : I \rightarrow \text{im}(f)$ streng monoton wachsend und stetig.

Gehen wir die einzelnen Punkte durch. Der erste Punkt ist selbsterklärend. Wenn wir eine stetige Funktion haben, dessen Urbild ein Intervall ist, dann ist das Bild der stetigen Funktion auch ein Intervall. Der zweite Punkt ist auch selbsterklärend. Wenn die Funktion monoton wachsend ist, so ist seine Umkehrfunktion auch monoton wachsend.

Satz 4.4.4 Stetigkeit der Umkehrfunktion bei offenem Definitionsbereich [Ziltener, 2024]

Seien $n, p \in \mathbb{N}$, sodass $n \geq p$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig und injektiv. Dann gilt:

- (i) Es gilt $n = p$.
- (ii) Das Bild $\text{im}(f) = f(U)$ ist offen (in \mathbb{R}^n).
- (iii) Die Umkehrfunktion der Funktion $f : U \rightarrow \text{im}(f)$ ist stetig.

Eine Funktion in einem n -Dimensionalen Bereich, welche ein Bereich transformiert, hat für sein Bild und Urbild dieselben Dimensionen (i). Des Weiteren gilt, dass das Urbild der Funktion offen ist. (ii) Schlussendlich gilt auch, dass die Umkehrfunktion der Funktion stetig ist (iii).

4.5 Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Definition 4.5.1: punktweise Konvergenz [Ziltener, 2024]

Wir sagen, dass die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ punktweise gegen f konvergiert genau dann, wenn

$$\forall x \in X : (f_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0} \rightarrow f(x).$$

Für die obige Definition nehmen wir an, dass wir eine Folge haben, dessen Elemente aus Funktionen besteht. Wenn wir einen Punkt wählen und diese in die Folge einsetzen (heisst den Punkt in die Funktionen der Folge einsetzen), so sehen wir, dass die darauffolgende Funktion immer näher dem Zielwert der Zielfunktion sich annähert. In anderen Worten, die Folge konvergiert.

Definition 4.5.2: gleichmässige Konvergenz [Ziltener, 2024]

Wir sagen, dass die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert genau dann, wenn

$$\left(\sup_{m \in \mathbb{N}_0} \|f_m(x) - f(x)\| \right) \rightarrow 0.$$

Die gleichmässige Konvergenz ist sehr ähnlich zur punktweisen Konvergenz. Der Unterschied besteht darin, dass der Abstand mit jedem Folgenglied zu mehreren Punkten abnimmt und schliesslich gegen 0 geht.

Kapitel 5

Differentialrechnung auf \mathbb{R}

Intuitiv ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $x_0, f(x_0)$. Genauer gesagt, ist die Ableitung der Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ für x gegen x_0 . Ableitungen sind allgegenwärtig in den Wissenschaften und im Ingenieurwesen. In der Mechanik ist die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Beispiel die Ableitung seines Ortes als eine Funktion der Zeit. Als ein anderes Beispiel ist in einem elektrischen Schwingkreis die Stromstärke gleich der Ableitung der Ladung des Kondensators als eine Funktion der Zeit.

5.1 Differential und Differentiationsregeln

Definition 5.1.1: Differenzenquotient, Differenzierbarkeit, Ableitung (in einem Punkt) [Ziltener, 2024]

- (i) Wir definieren den Differenzenquotienten von f zu x_0 als die Funktion

$$Q := Q_{x_0}^f : U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^p, Q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- (ii) Wir nennen f im Punkt x_0 differenzierbar genau dann, wenn

Q konvergiert im Punkt x_0 .

In diesem Fall definieren wir die Ableitung von f an der Stelle x_0 als den Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} Q = \lim_{x \rightarrow x_0} Q(x).$$

- (iii) Wir nennen f (auf U) differenzierbar genau dann, wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die Ableitung von f als die Funktion

$$f' : U \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Gehen wir die einzelnen Punkte der Definition durch. Der Differenzenquotient (i) ist in einfachen Worten gesagt die Änderungsrate einer Funktion, also die Steigung der Funktion zwischen zwei Punkten. Der zweite Punkt sagt einfach aus, dass wenn der Differenzenquotient gegen einen Wert (Steigung) konvergiert, so ist eine Funktion in diesem Punkt differenzierbar und seine Ableitung ist die Steigung selbst. (iii) sagt aus, dass die Ableitung eine Funktion sein kann, da die Funktion an jedem Punkt abgeleitet werden kann.

Bemerkung:-

Wir schreiben f_i für die i -te Komponente von f . (Es gilt also $f = (f_1, \dots, f_p)$.) Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, p\}$ die Funktion f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

In diesem Fall gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_p(x_0) \end{pmatrix}.$$

[Ziltener, 2024]

Wenn eine Funktion als Bild ein Vektor hat und als Urbild ein Skalar, dann ist die Funktion nur differenzierbar, wenn jede Komponente differenzierbar ist.

Satz 5.1.1 Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit [Ziltener, 2024]

Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist f an der Stelle x_0 stetig.

Satz 5.1.2 Summen-, Produkt-, Quotientenregel für Ableitung [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass f und g an der Stelle x_0 differenzierbar sind. Dann sind die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$, auch die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt:

- (i) (Summenregel) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (ii) (Produktregel = Leibnizregel) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- (iii) (Quotientenregel) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Satz 5.1.3 Kettenregel [Ziltener, 2024]

Falls f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 5.2.1 Mittelwertsatz [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass f stetig und auf dem offenen Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$, sodass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dieser Satz sagt nichts weiteres aus, als dass an einem gewissen Punkt der Funktion die Änderungsrate die durchschnittliche Änderungsrate der gesamten Funktion ist.

Korollar 5.2.1 verschwindende Ableitung impliziert Konstanz, positive Ableitung strenges Wachstum [Ziltener, 2024]

Sei f stetig und auf dem offenen Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Dann gilt folgendes:

- (i) Falls $f' \equiv 0$ auf $]a, b[$, dann ist f konstant.
- (ii) Falls $f' \geq 0$ auf $]a, b[$, dann ist f monoton wachsend.
- (iii) Falls $f' > 0$ auf $]a, b[$, dann ist f streng monoton wachsend.

Bemerkung:-

Für das obige Korollar gilt, dass falls $f' \leq 0$ auf $]a, b[$, dann ist f monoton fallend. Falls $f' < 0$ auf $]a, b[$, dann ist f streng monoton fallend.

Definition 5.2.1: rechts- und linksseitige Konvergenz [Ziltener, 2024]

- (i) Wir nehmen an, dass es ein $x_+ > x_0$ gibts, sodass $(x_0, x_+) \subseteq X$. Wir sagen, dass f im Punkt x_0 von rechts gegen y_0 konvergiert genau dann, wenn die eingeschränkte Funktion $f|_{(x_0, x_+)}$ im Punkt x_0 gegen y_0 konvergiert. In diesem Fall schreiben wir

$$f(x) \rightarrow y_0 (x \searrow x_0) \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \searrow x_0} y_0$$

und definieren den rechtsseitigen Grenzwert von f in x_0 als

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) := \lim_{x \downarrow x_0} f(x) := y_0.$$

- (ii) Wir nehmen an, dass es ein $x_- < x_0$ gibt, sodass $(x_-, x_0) \subseteq X$. Wir sagen, dass f im Punkt x_0 von links nach rechts gegen y_0 konvergiert genau dann, wenn die eingeschränkte Funktion $f|_{(x_-, x_0)}$ im Punkt x_0 gegen y_0 konvergiert. In diesem Fall schreiben wir

$$\left| f(x) \rightarrow y_0 (x \searrow x_0) \right| \quad \text{oder} \quad \left| f(x) \xrightarrow{x \searrow x_0} y_0 \right|$$

und definieren den links-seitigen Grenzwert von f in x_0 als

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) := \lim_{x \uparrow x_0} f(x) := y_0.$$

- (iii) Wir sagen, dass f im Punkt x_0 von links (rechts) konvergiert genau dann, wenn es ein $y_0 \in \mathbb{R}^p$ gibt wogegen f im Punkt x_0 von links (rechts) konvergiert

Der erste Punkt der Definition sagt aus, dass im Vergleich zum normalen Limes $x \rightarrow x_0$ von oben sich annähert aus dem Grund, weil wir nur ein kleines Intervall auf der rechten Seite von x_0 betrachten x_+ . Der zweite Punkt ist genau umgekehrt. x nähert sich x_0 von unten an, da wir nur ein kleines Intervall auf der linken Seite von x_0 betrachten. Beide Limes resultieren zu einem Punkt. Falls einer der Limes gilt für eine Funktion, so konvergiert die Funktion von rechts bzw. links zu y_0 .

Bemerkung:-

Falls F an der Stelle x_0 gegen y_0 konvergiert und G an der Stelle y_0 gegen z_0 konvergiert, dann konvergiert die verknüpfte Funktion $G \circ F$ an der Stelle x_0 gegen z_0 . [Ziltener, 2024]

Satz 5.2.2 Umkehrsatz [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass f' differenzierbar ist und $f' \neq 0$. Dann gilt das Folgende:

- (i) Das Bild von f ist durch das offene Intervall J gegeben,

$$\text{im}(f) = J.$$

- (ii) Die Funktion $f : I \rightarrow J$ ist bijektiv.

- (iii) Die Umkehrfunktion $f^{(-1)} = f^{-1} : J \rightarrow I$ ist differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \forall y \in J.$$

In einfachen Worten besagt der Satz, dass wenn eine Funktion differenzierbar (stetig) und monoton steigend bzw.

fallend ist, dann kann man eine Umkehrfunktion definieren, welche auch differenzierbar ist und dessen Steigung der Kehrwert der Steigung der ursprünglichen Funktion ist.

Definition 5.2.2: allgemeine Potenzfunktion [Ziltener, 2024]

Wir definieren die a -te Potenzfunktion als

$$p_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, p_a(x) := x^a = e^{a \log x} = \exp(a \log x).$$

5.3 Die komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische, Arkus-, Hyperbel- und Areafunktionen

Satz 5.3.1 Cos, Sin [Ziltener, 2024]

(i) ("Pythagoras Eigenschaft") Es gilt

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

(ii) Die eingeschränkten Funktionen $\sin|_{\mathbb{R}}$ und $\cos|_{\mathbb{R}}$ sind differenzierbar mit Ableitungen

$$\left| (\sin|_{\mathbb{R}})' = \cos|_{\mathbb{R}} \mid (\cos|_{\mathbb{R}})' = -\sin|_{\mathbb{R}} \right|$$

Proposition 5.3.1 Arkusfunktionen, Ableitungen davon [Ziltener, 2024]

(i) (eingeschränkter Sinus bijektiv) Die Funktion $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv.

(ii) (Arkussinus stetig) Die Umkehrfunktion

$$\arcsin := \sin^{(-1)} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

stetig.

(iii) (Ableitungen des Arkussinus) Die Einschränkung $\arcsin|_{]-1, 1[}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in]-1, 1[.$$

(iv) (eingeschränkter Kosinus bijektiv) Die Funktion $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv.

(v) (Arkuskosinus ist stetig) Die Umkehrfunktion

$$\arccos := \cos^{(-1)} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

ist stetig.

(vi) (Ableitung des Arkuskosinus) Die Einschränkung $\arccos|_{]-1, 1[}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in]-1, 1[.$$

(vii) (Ableitung des Tangens) Die Funktion $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

(viii) (eingeschränkter Tangens bijektiv) Die Funktion $\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv.

(ix) (Arkustangens) Die Umkehrfunktion

$$\arctan := \tan^{(-1)} : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

ist differenzierbar mit Ableitung

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Definition 5.3.1: Hyperbelfunktionen [Ziltener, 2024]

Wir definieren den hyperbolischen Kosinus, den hyperbolischen Sinus und den hyperbolischen Tangens als die Funktionen $\cosh, \sinh, \tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

5.4 Höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen

Definition 5.4.1: höhere (stetige) Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen [Ziltener, 2024]

- (i) Wir nennen f 0-mal differenzierbar (keine Bedingung). Wir definieren ihre 0-te Ableitung (oder Ableitung 0-ter Ordnung) als

$$f^{(0)} := f.$$

Rekursiv definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$: Die Funktion f heisst k -mal differenzierbar genau dann, wenn sie $(k-1)$ -mal differenzierbar ist und ihre $(k-1)$ -te Ableitung differenzierbar ist. Wir definieren ihre k -te Ableitung (oder Ableitung k -ter Ordnung) als

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})' : U \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

- (ii) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen f k -mal stetig differenzierbar (oder von der Klasse C^k oder schlicht C^k) genau dann, wenn f k -mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist. Wir definieren die Menge

$$C^k(U, \mathbb{R}^p) := C^k(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

und kürzen ab:

$$C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R}).$$

- (iii) Wir nennen f beliebig oft differenzierbar (oder C^∞ oder glatt) genau dann, wenn f k -mal differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die Menge

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^p) := C^\infty(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist glatt}\}.$$

Der erste Punkt ist selbsterklärend. Der Punkt sagt aus, dass eine Funktion k Mal abgeleitet werden kann nur dann, wenn die vorherigen Ableitungen auch existieren. Falls die Ableitung stetig ist, so ist die Funktion stetig differenzierbar (ii). Falls die Funktion beliebig oft abgeleitet werden kann und jeder dieser Ableitungen stetig ist, so ist die Funktion glatt.

Satz 5.4.1 Kriterium für stetige Differenzierbarkeit eines Limes [Ziltener, 2024]

Falls $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f konvergiert und $(f'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmässig gegen g konvergiert, dann gilt $f \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ und $f' = g$.

Falls mehrere Funktionen gegen eine Funktion f konvergiert und die Ableitungen der Funktionen gegen eine andere Funktion g konvergiert, dann ist $f' = g$ nur dann, wenn die Funktionen und seine Ableitungen gleichmässig konvergieren.

5.5 Taylornäherung einer Funktion, lokale Extrema

Definition 5.5.1: Taylorpolynom, Restglied, Taylorreihe [Ziltener, 2024]

Sei I ein offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ und $x_0 \in I$. Falls $m \geq 0$, dann nehmen wir an, dass f m -mal differenzierbar ist.

- (i) Wir definieren das Taylorpolynom von f m -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 (oder um x_0) als die Funktion

$$T_{f,x_0}^m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_{f,x_0}^m(x) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- (ii) Wir definieren das Restglied von f m -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 als die Funktion

$$R_{f,x_0}^m := f - T_{f,x_0}^m : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

- (iii) Falls f glatt ist, dann definieren wir die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt x_0 (oder um x_0) als die Folge der Taylorpolynome

$$T_{f,x_0} := (T_{f,x_0}^m)_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

Der Taylorpolynom wird verwendet, um Funktionen an einem bestimmten Punkt zu beschreiben. Je höher die Ordnung ist, desto genauer wird die Funktion beschrieben. Das Restglied ist ein Wert, welches die Genauigkeit der Approximation beschreibt. Je kleiner der Wert ist, desto genauer ist die Approximation. Schlussendlich kann der Taylorpolynom eine unendlich grosse Ordnung haben, wenn die Funktion glatt ist.

Satz 5.5.1 gleichmässige Konvergenz der Taylorreihe gegen Limes einer Potenzreihe [Ziltener, 2024]

Die Taylorreihe von f um x_0 konvergiert auf dem Intervall $\bar{B}_r^1(x_0) = [x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmässig gegen f , d. h.

$$\forall \epsilon \in]0, \infty[\exists m_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \bar{B}_r^1(x_0) : m \geq m_0 \Rightarrow |R_{f,x_0}^m(x) = f(x) - T_{f,x_0}^m(x)| \leq \epsilon.$$

Dieser Satz besagt, dass die Taylorreihe einer Funktion f gleichmässig auf einem bestimmten Intervall gegen f konvergiert. Das bedeutet: Egal welche maximal erlaubte Abweichung (dein ϵ) du dir für die Approximation wünschst, der Satz garantiert, dass du eine ausreichend hohe Ordnung (m_0) für das Taylorpolynom finden kannst. Ab dieser Ordnung (m_0) und für alle höheren Ordnungen ($m \geq m_0$) wird das Taylorpolynom die Funktion f für jeden einzelnen Punkt in dem betrachteten Intervall innerhalb dieser gewünschten maximalen Abweichung (ϵ) approximieren.

Satz 5.5.2 Satz von Taylor, Restglied in Lagrangeform [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass f $(m+1)$ -mal differenzierbar ist.

- (i) Falls $x_0 < x$, dann gibt es einen Punkt $\zeta \in]x_0, x[$, sodass

$$R_{f,x_0}^m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}.$$

- (ii) Falls $x_0 > x$, dann gibt es einen Punkt $\zeta \in]x, x_0[$, sodass $R_{f,x_0}^m(x) = \frac{f^{m+1}(\zeta)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$ gilt.

Der obige Satz definiert das Restglied ein wenig genauer durch eine Formel. ζ ist ein Element im offenen Intervall. Dieser kann bestimmt werden, indem wir das Supremum von $|f^{(m+1)}(\zeta)|$ herausfinden.

Definition 5.5.2: (strikte) lokale Extremalstelle [Ziltener, 2024]

Wir nennen x_0 eine lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine lokale Maximalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Maximalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodass

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Extremalstelle von f genau dann, wenn x_0 eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle ist.

Eine Extremalstelle einer Funktion kann eine lokale Minimal- oder Maximalstelle in einem bestimmten Intervall sein. Bei der Minimal- und Maximalstelle unterscheiden wir zwischen strikt und "normal". Bei der "normalen" Minimal- bzw. Maximalstelle können es mehrere Punkte sein, welche denselben kleinsten bzw. grössten Wert in diesem Intervall haben. Bei einem strikten Minimal- bzw. Maximalstelle kann es nur einen Punkt haben, welcher den kleinsten bzw. grössten Wert in diesem Intervall hat.

Bemerkung:-

Falls man über die ganze Funktion redet, so redet man über die globale (strikte) Minimal- bzw. Maximalstelle.

Definition 5.5.3: kritischer Punkt [Ziltener, 2024]

x_0 heisst kritischer (oder stationärer) Punkt von f genau dann, wenn die Ableitung von f in x_0 verschwindet, d. h.

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 5.5.3 (strikte) lokale Extremalstelle

- (i) (Satz von Fermat über kritische Punkte) Falls x_0 eine lokale Extremalstelle von f ist und f in x_0 differenzierbar ist, dann ist x_0 ein kritischer Punkt von f .
- (ii) Wir nehmen an, dass x_0 eine lokale Extremalstelle ist und dass es eine ungerade Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass f m -mal differenzierbar ist und $f^{(i)}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-1$.
Dann gilt $f^{(m)}(x_0) = 0$.
- (iii) Wir nehmen an, dass es eine gerade Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass f m -mal differenzierbar ist, und $f^{(m)}(x_0) > 0$ ($f^{(m)}(x_0) < 0$). Dann ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle (Maximalstelle) von f .

Damit eine Extremalstelle eine Minimal- bzw. Maximalstelle ist, betrachtet man die erste Ableitung der Funktion, welche nicht 0 ergibt. Falls die Ordnung der Ableitung ungerade ist, so handelt es sich bei dieser Extremalstelle nicht um eine Minimal- bzw. Maximalstelle. Ist die Ordnung der Ableitung gerade, so handelt es sich um eine Minimal- bzw. Maximalstelle.

Kapitel 6

Integration

6.1 Bestimmtes Riemann-Integral: Definition und Beispiele

Definition 6.1.1: Treppenfunktion [Ziltener, 2024]

φ heisst Treppenfunktion genau dann, wenn φ eine (endliche) Linearkombination von Indikatorfunktionen von Intervallen ist.

Das bedeutet, dass es eine Zahl gibt $k \in \mathbb{N}_0$, Intervalle $I_1, \dots, I_k \subseteq I$ und Zahlen $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{I_i}.$$

Die Intervalle dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein.

Eine Treppenfunktion besteht aus mehreren Intervallen, welche einen Wert zugewiesen worden sind. Diese Intervalle werden kombiniert zu einer Funktion.

Definition 6.1.2: elementares Integral einer Treppenfunktion [Ziltener, 2024]

Wir definieren das elementare Integral von φ als die Summe

$$S_I \varphi := S_I(\varphi) := \sum_{i=1}^k c_i |I_i|,$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $I_1, \dots, I_k \subseteq I$ Intervalle und $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ Zahlen sind, sodass

$$\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{I_i}.$$

Die obige Definition sagt nichts Weiteres aus, als dass das elementare Integral die Fläche zwischen der Funktion und der Abszisse ist. Bei der Treppenfunktion nehmen wir die einzelnen Abschnitte, multiplizieren sie mit der Höhe und summieren sie auf.

Definition 6.1.3: eigentliche Riemann-Integrierbarkeit, eigentliches Riemann-Integral [Ziltener, 2024]

(i) Wir definieren das untere und das obere (Riemann-)Integral von f (über I) als

$$\underline{\int_I} f := \sup\{S_I \varphi \mid \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion} : \varphi \leq f\},$$

$$\overline{\int_I} f := \inf\{S_I \psi \mid \psi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion} : \psi \geq f\}.$$

(ii) Wir nennen f (eigentlich Riemann)integrierbar (über I) genau dann, wenn

$$\underline{\int_I} f \geq \overline{\int_I} f.$$

In diesem Fall definieren wir das (bestimmte eigentliche Riemann-)Integral von f (über I) als

$$\int_a^b f(x) dx := \int_I f := \underline{\int_I} f.$$

Bevor wir das eigentliche Riemann-Integral anschauen, müssen wir erst das untere und obere Riemann-Integral anschauen. Das untere bzw. obere Riemann-Integral ist grösste Fläche, welche die Treppenfunktion bildet ohne dabei die Funktion zu überschreiten bzw. die kleinste Fläche, sodass die Treppenfunktion die Funktion überschreitet. Wenn das untere Riemann-Integral gleich dem oberen Riemann-Integral ist, dann gilt, dass das untere Riemann-Integral das eigentliche Riemann-Integral ist.

6.2 Eigenschaften der Riemann-Integration

Definition 6.2.1: Integral einer eingeschränkten Funktion [Ziltener, 2024]

Wir definieren

$$\int_{a'}^{b'} f := \int_{I'} f := \int_{I'} f|_{I'}.$$

Die obige Definition sieht ein wenig formell aus, sagt aber nichts Weiteres aus als, dass das Integral einer eingeschränkten Funktion das Integral der Funktion über dem Intervall ist, über dem die Funktion eingeschränkt ist.

Satz 6.2.1 eigenschaften der riemann-integration [Ziltener, 2024]

- (i) (treppenfunktion integrierbar) jede treppenfunktion $\varphi : i \rightarrow \mathbb{R}$ ist riemann-integrierbar.
- (ii) (stetige und beschränkte funktion integrierbar) jede stetige und beschränkte funktion $f : i \rightarrow \mathbb{R}$ ist riemann-integrierbar.
- (iii) jede beschränkte monotone funktion $f : i \rightarrow \mathbb{R}$ ist riemann-integrierbar.

seien jetzt $f, g : i \rightarrow \mathbb{R}$ riemann-integrierbar funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

- (iv) (monotonie) falls $f \leq g$, dann gilt

$$\int_i f \leq \int_i g.$$

(v) (linearität) die funktionen cf und $f + g$ sind riemann-integrierbar und

$$\int_i cf = c \int_i f.$$

$$\int_i (f + g) = \int_i f + \int_i g.$$

(vi) (minimum, maximum, absolutbetrag) die funktionen $\min f, g$, $\max f, g$ und $|f|$ sind riemann-integrierbar. es gilt

$$\left| \int_i f \right| \leq \int_i |f|.$$

(vii) (gebietsadditivität) seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $a \leq b \leq c$, und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$. die funktion f ist riemann-integrierbar genau dann, wenn die eingeschränkte funktionen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ riemann-integrierbar sind. in diesem fall gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktion

Definition 6.3.1: Integral mit vertauschten Grenzen [Ziltener, 2024]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Wir definieren das Integral

$$\int_b^a f := - \int_a^b f.$$

Definition 6.3.2: rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit und Ableitung [Ziltener, 2024]

(i) Wir nehmen das Folgende an:

$$X \cap [x_0, \infty[\text{ ist eine Umgebung von } x_0 \text{ in } [x_0, \infty[.$$

Wir definieren den rechtsseitigen Differenzenquotienten von f zu x_0 als die Abbildung

$$Q_{x_0}^{f,+} : X \cap [x_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^p, \quad Q_{x_0}^{f,+}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Wir nennen f an der Stelle x_0 rechtsseitig differenzierbar genau dann, wenn $Q_{x_0}^{f,+}$ an der Stelle x_0 konvergiert. In diesem Fall definieren wir die rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle x_0 als den Grenzwert

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} Q_{x_0}^{f,+}(x).$$

(ii) Linksseitige Differenzierbarkeit und Ableitung: Wir nehmen das Folgende an:

$$X \cap]-\infty, x_0] \text{ ist eine Umgebung von } x_0 \text{ in }]-\infty, x_0].$$

Wir definieren den linksseitigen Differenzenquotienten von f zu x_0 als die Abbildung

$$Q_{x_0}^{f,-} : X \cap]-\infty, x_0] \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad Q_{x_0}^{f,-}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Wir nennen f an der Stelle x_0 linksseitig differenzierbar genau dann, wenn $Q_{x_0}^{f,-}$ an der Stelle x_0 konvergiert. In diesem Fall definieren wir die linksseitige Ableitung von f an der Stelle x_0 als den Grenzwert

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} Q_{x_0}^{f,-}(x).$$

In einfachen Worten gesagt: Wenn wir einen Punkt auf einer Funktion wählen x_0 und einen weiteren Punkt wählen x' welcher grösser ist als x_0 und diese zwei Punkte mit einer Geraden verbinden, so bildet die Gerade eine Annäherung zur Tangente im Punkt x_0 . Wenn x' sich immer weiter x_0 annähert, so nähert sich auch die Tangente dem richtigen Wert an. Dies gilt auch für, wenn x' kleiner als x_0 ist.

Definition 6.3.3: Stammfunktion [Ziltener, 2024]

Eine Stammfunktion für f ist eine differenzierbare Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $F' = f$

Satz 6.3.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [Ziltener, 2024]

(i) (erster Hauptsatz) Seien $c \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Wir definieren

$$\left| F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_c^x f. \right|$$

Sei $x \in I$ eine Stetigkeitsstelle von f . Dann ist F an der Stelle x differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = f(x).$$

(ii) (zweiter Hauptsatz = Formel von Newton und Leibnitz) Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung Riemann-integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Gehen wir die einzelnen Punkte durch. Punkt (i) definiert eine Funktion f . Wenn wir nun das Integral bilden F und diese ableiten erhalten wir wieder die Funktion. Punkt (ii) sagt aus, dass wenn wir eine abgeleitete Funktion integrieren F' über einen Intervall a, b , so ist der Wert des Integrals die Differenz von der Stammfunktion F an Punkt b und der Stammfunktion an Punkt a .

6.4 Unbestimmte Integration

Definition 6.4.1: unbestimmtes Integral [Ziltener, 2024]

Seien X eine endliche Vereinigung von Intervallen mit positiven Längen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt.

Wir definieren das unbestimmte Integral von f als die Menge der Stammfunktion von f ,

$$\int f := \{\text{Stammfunktion von } f\}.$$

Wir wissen, dass beim Ableiten Konstanten verschwinden. Dies impliziert, dass beim Integrieren die Lösung mehrere Stammfunktionen sein könnten. Beim unbestimmten Integral sind alle möglichen Lösungen in einer Menge.

6.5 Partielle Integration, Anwendung: Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ als Wallisches Produkt

Satz 6.5.1 partielle Integration [Ziltener, 2024]

Sei X eine endliche Vereinigung von Intervallen mit positiver Länge und $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

Falls u, v differenzierbar sind und $u'v$ eine Stammfunktion besitzt, dann besitzt uv' eine Stammfunktion und es gilt

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Satz 6.5.2 Wallissches Produkt [Ziltener, 2024]

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\frac{\pi}{2}$, also

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots$$

6.6 Substitutionsregel, Anwendungen: gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, Separation der Variablen, Partialbruchzerlegung, Strategien für das Integrieren

Satz 6.6.1 Substitutionsregel [Ziltener, 2024]

Seien I ein offenes Intervall, $F \in C^1(I)$, $g \in C(\text{im}F)$ und $x_0, x_1 \in I$.

Es gilt

$$\int_{x_0}^{x_1} (g \circ F)F' = \int_{F(x_0)}^{F(x_1)} g.$$

6.7 Integration und gleichmässiger Limes, gliedweise Integration einer Potenzreihe

Proposition 6.7.1 Integral eines gleichmässigen Limes [Ziltener, 2024]

Falls die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gleichmässig gegen f konvergiert, dann konvergiert die Folge der Integrale $\left(\int_I f_m\right)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gegen das Integral $\int_I f$.

Korollar 6.7.1 durch Potenzreihe definierte Funktion ist gliedweise integrierbar [Ziltener, 2024]

Es gilt

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}) - \int_a^b f \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Das obige Korollar sagt nichts Weiteres aus, als dass man eine Funktion, die als Potenzreihe (also als unendliche Summe von Potenzen von x) vorliegt, gliedweise integrieren kann. Das bedeutet, man integriert jeden einzelnen Term der Reihe separat und summiert diese Ergebnisse dann auf. Im Grenzwert (wenn man unendlich viele Terme berücksichtigt) ergibt diese Summe genau das Integral der ursprünglichen Funktion. Es ist eine sehr praktische Methode, die die Integration von Potenzreihen auf die Integration von einfachen Potenzen reduziert.

Satz 6.7.1 Grenzwertsatz von Abel [Ziltener, 2024]

Falls die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n c_k r^k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, dann gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } x \nearrow r$$

Der Grenzwertsatz von Abel besagt, dass eine Funktion, die durch eine Potenzreihe definiert ist, sich auch am Rand ihres Konvergenzbereichs 'gut' verhält. Wenn die Potenzreihe an einem Randpunkt r selbst konvergiert (also einen endlichen Wert ergibt), dann strebt die Funktion $f(x)$ stetig genau diesem Wert zu, wenn x sich r von innen nähert. Dies garantiert eine Art 'Stetigkeit bis zum Rand', sofern die Reihe dort nicht 'abbricht'.

6.8 Uneigentliches Riemann-Integral

Definition 6.8.1: Konvergenz und Grenzwert einer Funktion bei $\pm\infty$
[Ziltener, 2024]

Seien $X \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : X \rightarrow Y$ und $y_0 \in \mathbb{R}^p$.

- (i) Wir nehmen an, dass X nach oben unbeschränkt ist. Wir sagen, dass f bei ∞ gegen y_0 konvergiert (oder dass $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen y_0 konvergiert) genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in (0, \infty) \exists x^* \in \mathbb{R} \forall x \in X : x \geq x^* \Rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \epsilon.$$

In diesem Fall nennen wir y_0 den Grenzwert von f bei ∞ und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := \lim_{\infty} f := y_0.$$

- (ii) Wir nehmen an, dass X nach unten unbeschränkt ist. Wir sagen, dass d bei $-\infty$ gegen y_0 konvergiert (oder dass $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ gegen y_0 konvergiert) genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in (0, \infty) \exists x^* \in \mathbb{R} \forall x \in X : x \leq x^* \Rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \epsilon.$$

In diesem Fall nennen wir y_0 den Grenzwert von f bei $-\infty$ und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) := \lim_{-\infty} f := y_0.$$

In Kapitel 4.2 haben über Grenzwerte von Funktionen geredet. In der obigen Definition haben wir die Funktion auf eine Variable erweitert, welche gegen unendlich geht. Das Konzept ist die gleiche.

Definition 6.8.2: uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit, uneigentliches Riemann-Integral [Ziltener, 2024]

- (i) Seien $a_- \in \mathbb{R}, a_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sodass $a_- < a_+$, und $f : [a_-, a_+[\rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn f eingeschränkt auf jedes kompakte Teilintervall von $[a_-, a_+[$ eigentlich Riemann-integrierbar ist und

$$\int_{a_-}^{x_+} f \text{ für } x_+ \nearrow a_+ \text{ konvergiert.}$$

In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f als

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \lim_{x_+ \nearrow a_+} \int_{a_-}^{x_+} f.$$

- (ii) Seien $a_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a_+ \in \mathbb{R}$, sodass $a_- < a_+$, und $f :]a_-, a_+] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn f eingeschränkt auf jedes kompakte Teilintervall von $]a_-, a_+]$ eigentlich Riemann-integrierbar ist und

$$\int_{x_-}^{a_+} f \text{ für } x_- \searrow a_- \text{ konvergiert.}$$

In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f als

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \lim_{x_- \searrow a_-} \int_{x_-}^{a_+} f.$$

- (iii) Seien $a_-, a_+ \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a_+ \in \mathbb{R}$, sodass $a_- < a_+$, und $f :]a_-, a_+[\rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen f uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn es ein $b \in]a_-, a_+]$ gibt, sodass $f|_{[b, a_+]$ und $f|_{]a_-, b]}$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall definieren wir das uneigentliche Integral von f als

$$\int_{a_-}^{a_+} f := \int_{a_-}^b f + \int_b^{a_+} f$$

wobei $b \in]a_-, a_+]$.

Wir betrachten nun wie bei den Grenzwerten Integralen, dessen Intervalle ins Unendliche gehen. Falls der Wert des Integrals gegen einen Wert strebt, so konvergiert dieses Integral und dieser Wert ist die Lösung des uneigentlichen Integrals.

Bei der Berechnung von Integralen kann es bei bestimmten Intervallen zu Problemen führen, weshalb man auch die Intervalle aufteilen kann und die Integrale miteinander summieren kann.

Teil II

Analysis II

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anwendung auf die Mechanik und die Elektrotechnik

7.1 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung, Anfangswertproblem, Beispiele, gedämpfter Federschwinger, elektrische Schwingkreis

Definition 7.1.1: Gewöhnliche Differentialgleichung [Ziltener, 2024]

Sei $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ und I ein offenes Intervall. (I kann beschränkt oder unbeschränkt sein.) Wir bezeichnen die Variable in \mathbb{R} mit t , verwenden die Notation $\dot{u} = u'$ für die Ableitung einer Funktion u und schreiben $u^{(k)}$ für die k -te Ableitung von u .

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDG) der Ordnung n für eine Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form

$$\left| \varphi(t, u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0 \right| \quad \forall t \in I \quad \left| \right.$$

wobei $\varphi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konstante Funktion ist, die nicht bezüglich der letzten Variable konstant ist.

Eine GDG ist eine Gleichung bestehend aus einer Linearkombination von einer Funktion und seine Ableitungen.

Bemerkung:-

Analog definieren wir den Begriff einer GDG für eine Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{C}$, indem wir oben überall \mathbb{R} durch \mathbb{C} ersetzen. [Ziltener, 2024]

Definition 7.1.2: Anfangswertproblem

Wir wissen, dass es unendlich viele Ableitungen von einer Funktion gibt, weil die Konstante beliebig gewählt werden kann. Damit wir bei GDG Differentialgleichungen nicht dieses Problem haben, können wir das Anfangswertproblem einführen. Das Anfangswertproblem führt Bedingungen für die GDG ein, damit es nicht zu unendlichen vielen Möglichkeiten gibt für die Urfunktion.

7.2 Linearität und Homogenität einer GDG, Superpositionsprinzip, Lösungsraum einer homogenen linearen GDG, charakteristisches Polynom einer GDG

Definition 7.2.1: Linearität und Homogenität einer GDG [Ziltener, 2024]

Wir nennen die GDG für eine reellwertige Funktion linear genau dann, wenn es Funktionen $a_i, f : I \rightarrow \mathbb{R} (i = 0, \dots, n)$ gibt, sodass die GDG nach Verschieben von Termen gegeben ist durch

$$\sum_{i=0}^n a_i u^{(i)} = f, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{i=0}^n a_i(t) U^{(i)}(t) = f(t), \quad \forall t \in I$$

Wir nehmen jetzt an, dass die GDG linear ist. Falls die Funktion f konstant gleich 0 ist, dann heisst die GDG homogen, sonst inhomogen. Die Funktion f heisst die Inhomogenität (Quellterm oder Störterm) der GDG.

GDG können die Eigenschaft von Linearität und Homogenität annehmen. Eine GDG ist linear, wenn

1. die Funktion $U(t)$ und seine Ableitungen keine Potenzen haben,
2. die Funktion $U(t)$ selbst und seine Ableitungen nicht in einer Funktion sind,
3. die Funktion $U(t)$ sowie seine Ableitungen nicht miteinander multipliziert werden.

Falls die GDG linear ist und konstant gleich 0 ist, so ist sie homogen. Ansonsten ist sie inhomogen.

Bemerkung:-

Wir definieren Linearität für eine GDG für komplexwertige Funktion analog. [Ziltener, 2024]

Definition 7.2.2: Superpositionsprinzip

Wenn eine lineare GDG als Lösung zwei oder mehrere Funktionen hat, dann kann man diese zwei Funktionen miteinander addieren. Dies ist dann die endgültige Lösung der GDG.

Definition 7.2.3: charakteristisches Polynom [Ziltener, 2024]

Wir definieren das charakteristische Polynom der GDG als die Funktion

$$p(\lambda) := \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Eine GDG kann in ein charakteristisches Polynom umgewandelt werden, indem man die Funktion U mit λ ersetzt und die Ableitung $U^{(i)}$ durch die dazugehörige Potenz λ^i . Durch die Umwandlung ist es viel einfacher die Lösungen der GDG zu finden, da Lambda die Eigenwerte der GDG sind. Diese können dann eingesetzt werden. ($u(t) = u_\lambda(t) := e^{\lambda t}$)

7.3 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme

Definition 7.3.1: System gewöhnlicher Differentialgleichungen [Ziltener, 2024]

Ein System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für n Funktionen von I nach \mathbb{R} ist eine Gleichung für eine differenzierbare Funktion $U : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form

$$\psi(t, U(t), \dot{U}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

wobei $\psi : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine feste Funktion der Variablen t, X, Y ist, die nicht bezüglich Y konstant ist. Wir nennen ein solches System linear genau dann, wenn es eine Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, sodass für jedes $t \in I$ die Funktion $(X, Y) \mapsto \psi(t, X, Y) + F(t)$ linear ist.

Wir nehmen jetzt an, dass das System linear ist. Falls F wie oben konstant gleich 0 gewählt werden kann, dann heisst das System homogen, sonst inhomogen. Die Funktion F heisst die Inhomogenität (oder Quellterm) der GDG.

Ein System GDG ist eine erweiterte Definition der GDG aus Kapitel 7.1. Anstelle dass es nur eine einzige Gleichung ist, ist ein System GDG mehrere Gleichungen.

Bemerkung:-

Analog definieren wir den Begriff eines Systems von GDG erster Ordnung für n Funktionen von I nach \mathbb{C} und Linearität eines solchen Systems. [Ziltener, 2024]

Kapitel 8

Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

8.1 Partielle Ableitung und Differential

Definition 8.1.1: Differenzierbarkeit und Ableitung einer vektorwertigen Funktion einer Variable [Ziltener, 2024]

Sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{R} , $p \in \mathbb{N}$,

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$$

eine Funktion und $y_0 \in U$.

Wir nennen g an der Stelle y_0 differenzierbar genau dann, wenn jede Komponente g_i im Punkt y_0 differenzierbar ist (im Sinn der Analysis I). In diesem Fall definieren wir die Ableitung von g im Punkt y_0 als den Vektor

$$g'(y_0) := \begin{pmatrix} g'_1(y_0) \\ \vdots \\ g'_p(y_0) \end{pmatrix}.$$

Wenn wir eine Funktion haben, welcher als Lösung einen Vektor hat, dann ist diese nur differenzierbar, wenn jede Funktion im Vektor selbst differenzierbar ist. Dies sagt die obige Funktion.

Definition 8.1.2: partielle Differenzierbarkeit [Ziltener, 2024]

Seien nun $n, p \in \mathbb{N}$, U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Das bedeutet, dass f eine vektorwertige Funktion mehrerer Veränderlicher ist. Wir schreiben x^j für die j -te Koordinate eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ und f^i für die i -te Komponente von f . Das bedeutet, dass

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^p(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}, \quad \forall x \in U.$$

Sei $x_0 \in U$ und $j \in \{1, \dots, n\}$.

Wir nennen f an der Stelle x_0 partiell nach der j -ten Variable x^j differenzierbar genau dann, wenn die Funktion

$$g(y) := f(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, y, x_0^{j+1}, \dots, x_0^n)$$

im Punkt $y = x_0^j$ differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die partielle Ableitung von f nach der j -ten Variable im Punkt x_0 als die Ableitung von g im Punkt x_0^j . Wir schreiben diese partielle Ableitung als

$$f_{x^j}(x_0) := D_j f(x_0) := \partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) := g'(x_0^j) \in \mathbb{R}^p.$$

Wir sagen, dass f im Punkt x_0 partiell differenzierbar ist genau dann, wenn f im Punkt x_0 nach jeder Variablen partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die Jacobi-Matrix von f im Punkt x_0 als die Matrix

$$J_f(x_0) := (f_{x^1} \cdots f_{x^n}(x_0)) = \begin{pmatrix} f_{x^1}^1(x_0) & \cdots & f_{x^n}^1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x^1}^p(x_0) & \cdots & f_{x^n}^p(x_0) \end{pmatrix}.$$

Wir nennen f partiell differenzierbar genau dann, wenn f in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung von f nach der j -ten Variable als die Abbildung

$$f_{x^j} : U \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ (mit n Eingabevariablen und p Ausgabekomponenten) wird an einem Punkt $x_0 \in U$ partiell nach der j -ten Variable x^j differenzierbar genannt, wenn die Funktion, die entsteht, indem man alle anderen Variablen ausser x^j auf ihre Werte in x_0 fixiert, klassisch nach x^j differenzierbar ist. Die resultierende partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)$ ist dann ein Vektor in \mathbb{R}^p . f ist an x_0 partiell differenzierbar, wenn sie nach jeder ihrer n Variablen partiell differenzierbar ist. In diesem Fall fasst die Jacobi-Matrix $J_f(x_0)$ alle partiellen Ableitungen von f nach den Variablen als $p \times n$ -Matrix zusammen, wobei jede Spalte der partiellen Ableitung nach einer Variablen entspricht. f heisst partiell differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs U partiell differenzierbar ist.

Definition 8.1.3: (totale) Ableitung [Ziltener, 2024]

Wir nennen f an der Stelle x_0 (total) differenzierbar genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ gibt, sodass

$$g(x) := \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Wir nennen f (total) differenzierbar genau dann, wenn f an der Stelle in U differenzierbar ist.

Wir erinnern uns an die Definition von Kapitel 5.1. Die obige Definition erweitert die eben genannte Definition auf Vektorebene.

8.2 Differentiationsregeln, Kettenregel, Richtungsableitung, Gradient, stetige Differenzierbarkeit

Satz 8.2.1 Kettenregel [Ziltener, 2024]

Falls f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ (df(x_0)) = dg(f(x_0))df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

Korollar 8.2.1 Ableitung von Summe, Produkt, Quotient [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Es gilt:

(i) Die Summe $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

(ii) (Leibnizregel) Das Skalarprodukt $f \cdot g = \sum_{i=1}^p f^i g^i$ ist in x_0 differenzierbar und

$$d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0),$$

wobei $g(x_0) \cdot df(x_0) := \sum_{i=1}^p g^i(x_0)df^i(x_0)$ usw.

(iii) Wenn $p = 1$ und $g(x_0) \neq 0$, dann ist der Quotient $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Definition 8.2.1: Richtungsableitung [Ziltener, 2024]

Wir sagen, dass f an der Stelle x_0 in Richtung v differenzierbar ist genau dann, wenn die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad g(t) := f(x_0 + tv),$$

im Punkt $t = 0$ differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die (Richtungs-)Ableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v als den Vektor

$$d_v f(x_0) := D_v f(x_0) := g'(0) := \begin{pmatrix} g'_1(0) \\ \vdots \\ g'_p(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

Die Richtungsableitung wird verwendet, um die Funktion in eine bestimmte Richtung von einem beliebigen Punkt x_0 zu beschreiben. Die Richtung kann mit dem Richtungsvektor v bestimmt werden.

Definition 8.2.2: Gradient [Ziltener, 2024]

Der Gradient von f an der Stelle von x ist der Vektor

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x^1}(x) \\ \vdots \\ f_{x^n}(x) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist ein Vektor bestehend aus den partiellen Ableitungen der Funktion. Der Gradient zeigt immer in die Richtung wo die Tangente eines Punktes auf der Funktion die grösste Steigung hat. Die Länge des Gradienten

ist die Steigung selbst.

Definition 8.2.3: stetige partielle Differenzierbarkeit [Ziltener, 2024]

Wir nennen eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig partiell differenzierbar (oder schlichtweg stetig differenzierbar oder von der Klasse C^1) genau dann, wenn f partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen stetig sind.

Wir definieren die Menge

$$C^1(U, \mathbb{R}^p) := C^1(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}.$$

Im Fall $p = 1$ schreiben wir einfacher

$$C^1(U) := C^1(U, \mathbb{R}).$$

Die stetige partielle Differenzierbarkeit sagt aus, dass eine Funktion, wenn abgeleitet in jede Richtung stetig ist. Dies bedeutet, dass es keine abrupte Änderung der Steigung gibt.

Bemerkung:-

Stetige partielle Differenzierbarkeit impliziert totale Differenzierbarkeit. Totale Differenzierbarkeit impliziert jedoch nicht stetige partielle Differenzierbarkeit.

8.3 Vektorfeld, Potential und Wegintegral

Definition 8.3.1: Vektorfeld, Gradientenfeld [Ziltener, 2024]

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung

$$X : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sei $f \in C^1(U)$. Wir definieren das Gradientenfeld von f als

$$\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix}.$$

Ein Vektorfeld kann man sich als eine Abbildung von Punkten vorstellen, wobei an jedem Punkt ein Vektor zugeordnet wird. Der dazugehörige Gradientenfeld ist in einfachen Worten gesagt die Ableitung des Vektorfeldes. Diese zeigt in Richtung mit der steilsten Steigung des Vektorfeldes.

Definition 8.3.2: Potential und Konservativität eines Vektorfeldes [Ziltener, 2024]

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Ein Potential für X ist eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\partial f = X.$$

Das Vektorfeld X heisst konservativ genau dann, wenn es ein Potential besitzt.

In sehr einfachen Worten gesagt hat ein Vektorfeld ein Potential falls das Vektorfeld der Gradient der Ursprungsfunktion ist. Falls ein Vektorfeld ein Potential besitzt, so ist das Vektorfeld konservativ.

Definition 8.3.3: Wegintegral [Ziltener, 2024]

Wir definieren das Wegintegral von X längs γ als

$$\int X \cdot d\gamma := \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

Das Wegintegral berechnet die gesamte kumulative Wirkung eines Vektorfeldes entlang eines definierten Pfades. Hierbei wird an jedem Punkt des Weges der Anteil des Feldes berücksichtigt, der in Bewegungsrichtung liegt. Das Ergebnis des Wegintegrals ist immer eine einzelne Zahl (ein Skalar), die beispielsweise die gesamte verrichtete Arbeit darstellt.

Definition 8.3.4: Geschlossenheit eines Weges [Ziltener, 2024]

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge.

Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ heisst geschlossen genau dann, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Einfach gesagt ist ein Weg geschlossen, falls der Weg am selben Punkt endet, wo er angefangen hat.

Definition 8.3.5: weg-zusammenhängend, konvex [Ziltener, 2024]

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

- (i) S heisst weg-zusammenhängend genau dann, wenn es für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in S$ einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ von x_0 nach x_1 gibt, d. h.

$$\gamma(i) = x_i, \quad \text{für } i = 0, 1.$$

- (ii) S heisst konvex genau dann, wenn für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in S$ und jedes $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\gamma(t) := (1 - t)x_0 + tx_1 \in S.$$

Eine Menge ist weg-zusammenhängend, wenn man zwei beliebige Punkte wählen kann und diese mit einem Weg verbinden kann, welche sich innerhalb der Menge befindet. Falls dieser Weg auch eine gerade ist, so ist die Menge konvex.

8.4 Charakterisierung der Konservativität mittels Ableitungen, Integrabilitätsbedingung, Rotation eines Vektorfeldes

Definition 8.4.1: einfach zusammenhängend [Ziltener, 2024]

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend genau dann, wenn S weg-zusammenhängend ist und für jede stetige Abbildung $\gamma : S^1 \rightarrow S$ es eine stetige Ableitung $h : [0, 1] \times S$ gibt, sodass

$$h(0, y) = \gamma(y), \forall y \in S^1, \quad \gamma' := h(1, \cdot) : S^1 \rightarrow S \text{ ist konstant.}$$

Die Definition beschreibt eine Menge, welche keine Löcher beinhaltet. In einfachen Worten gesagt ist laut Definition eine Menge einfach zusammenhängend, wenn man den Weg, welcher die Menge umschliesst, auf ein Punkt verkleinern kann, ohne dabei die Menge selbst zu verlassen. Falls die Menge Löcher enthält, so muss der verkleinerte Weg durch das Loch durch.

Satz 8.4.1 Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung [Ziltener, 2024]

- (i) Falls X konservativ ist, dann erfüllt es die Integrabilitätsbedingung

$$D_i X^j = D_j X^i, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

- (ii) Falls U einfach zusammenhängend ist und wegzusammenhängend und konvex ist, dann ist X konservativ.

(i): Falls das Vektorfeld X konservativ ist, dann muss die partielle Ableitung seiner j -ten Komponente nach der i -ten Variablen dasselbe Ergebnis liefern wie die partielle Ableitung seiner i -ten Komponente nach der j -ten Variablen.

(ii): Ist selbsterklärend.

Definition 8.4.2: Rotation eines Vektorfeldes [Ziltener, 2024]

- (i) Fall $n = 2$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die (skalare) Rotation (oder Wirbelstärke) von X als die reellwertige Funktion

$$\text{rot } X := D_1 X^2 - D_2 X^1 = \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

- (ii) Fall $n = 3$: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die Rotation von X als das Vektorfeld

$$\vec{\text{rot}} X := \nabla \times X := \begin{pmatrix} D_2 X^3 - D_3 X^2 \\ D_3 X^1 - D_1 X^3 \\ D_1 X^2 - D_2 X^1 \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

8.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Taylorpolynom, lokale Extremalstelle, Hesse-Matrix

Definition 8.5.1: höhere (stetige) partielle Differenzierbarkeit, C^k [Ziltener, 2024]

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir nennen jede Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ 0-mal partiell differenzierbar (keine Bedingung). Ihre (eindeutige) partielle Ableitung 0-ter Ordnung ist f . Rekursiv definieren wir für $k \in \mathbb{N}$:

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ heißt k -mal partiell differenzierbar genau dann, wenn sie $(k-1)$ -mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen $(k-1)$ -ter Ordnung partiell differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen von f k -ter Ordnung sind die Funktionen $D_j g$, wobei $j \in \{1, \dots, n\}$ und g alle partiellen Ableitungen von f $(k-1)$ -ter Ordnung durchläuft.

Wir nennen f k -mal stetig partiell differenzierbar (oder k -mal stetig differenzierbar oder schlicht C^k) genau dann, wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und ihre partiellen Ableitungen k -ter Ordnung stetig sind. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Menge

$$C^k(U, \mathbb{R}^p) := (C^k(U; \mathbb{R}^p) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}).$$

Wir nennen f beliebig oft stetig partiell differenzierbar (oder C^∞ oder glatt) genau dann, wenn $f \in C^k$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

In einfachen Worten gesagt beschreibt diese Definition wie eine Funktion aussieht in Abhängigkeit mit der Differenzierbarkeit. Je öfter man die Funktion ableiten kann, desto glatter ist die Funktion.

Satz 8.5.1 Schwarz, Vertauschen partieller Differentiationen [Ziltener, 2024]

Es gilt

$$D_i D_j f = D_j D_i f.$$

Definition 8.5.2: Taylorpolynom [Ziltener, 2024]

Wir definieren das Taylorpolynom von f m -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 als die Funktion $T_{f,x_0}^m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{f,x_0}^m(x) &:= \sum_{k=0}^m \frac{i_1, \dots, i_k = 1}{n} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^k (x - x_0)_{i_j} \\ &= f(x_0) + \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} f(x_0) (x - x_0)_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^n D_{i_2} D_{i_1} f(x_0) (x - x_0)_{i_1} (x - x_0)_{i_2} + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n D_{i_m} \cdots D_{i_1} f(x_0) (x - x_0)_{i_1} \cdots (x - x_0)_{i_m}. \end{aligned}$$

Ein Taylorpolynom ist eine einfachere Polynomfunktion, die eine komplexere Funktion, insbesondere bei mehreren Variablen, um einen bestimmten Entwicklungspunkt herum annähert. Es wird konstruiert, indem der Funktionswert und alle ihre partiellen Ableitungen (erste, zweite usw. bis zu einer bestimmten Ordnung) an diesem genauen Punkt berechnet werden. Jeder Term im Polynom nutzt diese Ableitungswerte, um eine zunehmend genauere, aber immer noch einfache Annäherung des Verhaltens der ursprünglichen Funktion in der Nähe dieses Punktes zu bilden.

In Vergleich zur Definition in Kapitel ?? bezieht sich diese Definition auf Funktionen mit mehreren Variablen.

Bemerkung:-

Die folgende Proposition beschreibt, wie man das Taylorpolynom kompakter beschreiben kann.

Proposition 8.5.1 Taylorpolynom in Multi-Index-Schreibweise [Ziltener, 2024]

Das Taylorpolynom T_{f,x_0}^m ist gegeben durch

$$T_{f,x_0}^m(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lemma 8.5.1 partielle Ableitungen und Multi-Indizes [Ziltener, 2024]

Es gilt

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x_0) \prod_{j=1}^k v_{i_j} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} D^\alpha f(x_0) v^\alpha.$$

Dieses Lemma zeigt, dass die detaillierte Summe über alle möglichen Reihenfolgen von k -ten partiellen Ableitungen (linke Seite) mathematisch identisch ist mit der kompakten Darstellung mittels Multi-Indizes (rechte Seite). Der entscheidende Multinomialkoeffizient auf der rechten Seite zählt dabei genau, wie viele der unterschiedlichen Reihenfolgen auf der linken Seite zur selben einzigartigen Ableitung führen. So wird eine übersichtlichere und effizientere Schreibweise für Ausdrücke mit vielen Ableitungen bewiesen, ohne dass sich der Wert der Summe ändert.

Satz 8.5.2 Taylorformel [Ziltener, 2024]

Es gibt eine Zahl $\theta \in (0, 1)$, sodass gilt

$$f(x) = T_{f,x_0}^m(x) + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_\theta)(x - x_0)^\alpha.$$

Die Taylorformel besagt, dass eine Funktion $f(x)$ sich exakt als ihr Taylorpolynom $T_{f,x_0}^m(x)$ darstellen lässt, ergänzt um einen präzisen Restterm. Dieser Restterm repräsentiert die genaue Differenz zwischen der Funktion und ihrer Polynomannäherung und sieht ähnlich aus wie der nächste Term der Taylorreihe. Der entscheidende Punkt ist, dass die Ableitungen im Restterm an einer unbekannten Zwischenstelle x_θ (die zwischen dem Entwicklungspunkt x_0 und x liegt) ausgewertet werden, was die genaue Fehlerabschätzung ermöglicht.

Definition 8.5.3: Restglied [Ziltener, 2024]

Wir definieren das Restglied von f m -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt x_0 als die Funktion

$$R_{f,x_0}^m := f - T_{f,x_0}^m : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Definition entspricht der Definition aus Kapitel ?? mit dem Unterschied, dass es für Funktionen mit mehreren Variablen gilt.

Definition 8.5.4: strikte lokale Extremalstelle [Ziltener, 2024]

Wir nennen x_0 eine lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Minimalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine lokale Maximalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine strikte lokale Maximalstelle von f genau dann, wenn es eine Umgebung V von x_0 in U gibt, sodass

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}.$$

Wir nennen x_0 eine (strikte) lokale Extremalstelle von f genau dann, wenn x_0 eine (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle ist.

Wie die vorherige Definition entspricht diese Definition der Definition aus Kapitel ?? mit dem Unterschied, dass es für Funktionen mit mehreren Variablen gilt.

Definition 8.5.5: kritischer Punkt [Ziltener, 2024]

x_0 heisst kritischer (oder stationärer) Punkt von f genau dann, wenn die Ableitung von f in x_0 verschwindet, d. h.

$$df(x_0) = 0.$$

Definition 8.5.6: Hesse-Matrix [Ziltener, 2024]

Wir definieren die Hesse-Matrix von f im Punkt x_0 als die quadratische Matrix

$$\text{Hess}_f(x_0) := (D_i D_j f(x_0))_{i,j=1}^n.$$

Die Hesse-Matrix ist das multivariate Äquivalent der zweiten Ableitung und beschreibt die "Krümmung" einer

Funktion mit mehreren Variablen an einem bestimmten Punkt. Sie ist eine quadratische Matrix, deren Einträge alle möglichen zweiten partiellen Ableitungen der Funktion sind, ausgewertet am Entwicklungspunkt. Diese Matrix ist entscheidend, um die Art von lokalen Extrempunkten (Minimum, Maximum oder Sattelpunkt) zu bestimmen.

Kapitel 9

Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, Untermannigfaltigkeit des Koordinatenraums, Tangentialraum

9.1 C^k -Diffeomorphismus, Umkehrsatz

Definition 9.1.1: C^k -Diffeomorphismus [Ziltener, 2024]

Eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ heisst C^k -Diffeomorphismus genau dann, wenn sie bijektiv und C^k ist und ihre Umkehrung C^k ist. Wir nennen einen C^∞ -Diffeomorphismus einen glatten Diffeomorphismus oder einfach einen Diffeomorphismus.

In einfachen Worten gesagt ist ein C^k -Diffeomorphismus eine Funktion, welche bijektiv ist. Des Weiteren gilt, dass die Funktion selber und seine Inverse zu einem gewissen Grad k differenzierbar ist.

Satz 9.1.1 Umkehrsatz [Ziltener, 2024]

Seien $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in C^k(U_0, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in U_0$ ein Punkt, sodass $Df(x_0)$ invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq U_0$ von x_0 , sodass $f(U)$ offen ist und die Einschränkung

$$f : U \rightarrow f(U)$$

ein C^k -Diffeomorphismus ist.

Der Umkehrsatz besagt, dass wenn eine C^k -Funktion $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ an einem Punkt x_0 eine invertierbare Ableitung $Df(x_0)$ besitzt, dann ist f in einer kleinen Umgebung von x_0 lokal umkehrbar. Die existierende lokale Umkehrfunktion ist ebenfalls C^k -glatt. Folglich ist die Funktion f in dieser Umgebung ein C^k -Diffeomorphismus.

9.2 Der Satz über implizite Funktionen

Satz 9.2.1 implizite Funktionen [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass

$$f(x_0, y_0) = 0, D_y f(x_0, y_0) \text{ invertierbar ist.}$$

Die folgenden Aussagen gelten:

- Es gibt offene Umgebungen U von x_0 und V von y_0 und eine Abbildung

$$g \in C^k(U, V),$$

sodass

$$U \times V \subseteq W,$$

$$f^{-1}(0) \cap (U \times V) = \text{gr}(g) = \{(x, g(x)) | x \in U\},$$

$$D_y f(x, g(x)) \text{ invertierbar ist, } \forall x \in U.$$

($\text{gr}(g)$ = Graph von g)

(ii) Seien U, V und g wie in (i) und $x \in U$. Dann gilt

$$Dg(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Das Implizite Funktionentheorem besagt, dass wenn eine Funktion $f(x, y) = 0$ an einem Punkt (x_0, y_0) erfüllt ist und die partielle Ableitung $D_y f(x_0, y_0)$ dort invertierbar ist, Dann existiert lokal um (x_0, y_0) eine eindeutige, glatte Funktion g , die y als Funktion von x definiert, sodass $f(x, g(x)) = 0$ gilt. Des Weiteren liefert das Theorem eine Formel, um die Ableitung von $g(x)$ mithilfe der partiellen Ableitungen von f zu berechnen.

9.3 Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums

Definition 9.3.1: Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums [Ziltener, 2024]

Seien $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $d \in \{0, \dots, n\}$.

Sei $x_0 \in M$. Wir sagen, dass M um x_0 eine d -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist genau dann, wenn es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 , eine Permutation σ von $\{1, \dots, n\}$, eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $f \in C^k(V, \mathbb{R}^{n-d})$ gibt, sodass

$$\{(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}) | x \in M \cap U\} = \text{gr}(f) = \{(y, f(y)) | y \in V\}.$$

Wir nennen M eine d -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n genau dann, wenn M diese Bedingung für jedes $x_0 \in M$ erfüllt. In Fall $k = \infty$ nennen wir eine solche Teilmenge M eine glatte (d -dimensionale) Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

In einfachen Worten gesagt ist eine Untermannigfaltigkeit eine Menge, welche zu einem gewissen Grad k differenzierbar ist und eine kleinere Dimension hat als die Dimension des Koordinatenraums.

9.4 Immersionen, Einbettungen, Submersionen, Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten

Definition 9.4.1: Immersion, Submersion, Einbettung [Ziltener, 2024]

Seien $n, p \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Sei $x \in U$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist. Wir sagen, dass f ein Punkt x eine Immersion ist genau dann, wenn $Df(x)$ injektiv ist. Wir sagen, dass f im Punkt x eine Submersion ist genau dann, wenn f in jedem Punkt eine Immersion / Submersion ist. Wir nennen f eine C^k -Einbettung genau dann, wenn f injektiv, C^k und eine Immersion ist und $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ stetig ist.

Eine Funktion ist an einem Punkt eine Immersion, wenn ihre Ableitung dort injektiv ist, was bedeutet, dass sie die lokale Dimension des Raumes nicht reduziert. Eine Submersion hingegen hat an einem Punkt eine surjektive Ableitung und "bedeckt" den Zielraum lokal vollständig, was oft eine Dimensionsreduktion bedeutet. Eine Einbettung ist eine injektive, glatte Immersion, deren Umkehrfunktion ebenfalls stetig ist, wodurch sie eine topologisch treue Kopie des Ursprungsraums im Zielraum bildet.

9.5 Satz von regulären Wert

Definition 9.5.1: regulärer Wert [Ziltener, 2024]

Wir nennen z_0 einen regulären Wert für g genau dann, wenn g eine Submersion ist in jedem Punkt von

$$g^{-1}(z_0) = \{x \in U_0 \mid g(x) = z_0\}.$$

Sonst nennen wir z_0 einen singulären Wert für g .

Ein Wert z_0 heisst regulärer Wert für eine Funktion g , wenn g in jedem Punkt ihrer Urbildmenge $g^{-1}(z_0)$ eine Submersion ist. Das bedeutet intuitiv, dass die Funktion g an allen diesen Punkten lokal "gutartig" und äusbreitend ist und keine "degenerierte" Abbildung besitzt. Als Konsequenz bildet die Urbildmenge $g^{-1}(z_0)$ selbst eine "glatte" Struktur (wie eine Mannigfaltigkeit). Ist dies an mindestens einem Punkt von $g^{-1}(z_0)$ nicht der Fall, so wird z_0 als singulärer Wert bezeichnet.

Satz 9.5.1 Satz vom regulären Wert [Ziltener, 2024]

Das Urbild jedes regulären Wertes für g ist eine C^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n der Dimension $n - p$.

Der Satz besagt, dass das Urbild $g^{-1}(z_0)$ eines regulären Wertes z_0 unter einer Funktion g stets eine glatte Untermannigfaltigkeit ist. Dies bedeutet, dass die Menge der Punkte, die auf z_0 abgebildet werden, lokal wie ein flacher euklidischer Raum aussieht. Die Dimension dieser Untermannigfaltigkeit ist dabei präzise $n - p$, wobei n die Dimension des Definitionsbereichs und p die Dimension des Wertebereichs von g ist.

9.6 Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit

Definition 9.6.1: Tangentialraum [Ziltener, 2024]

Seien $n \in \mathbb{N}_0, M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in M$.

Wir definieren $T_{x_0}M$, den Tangentialraum an M in Punkt x_0 als die Menge

$$T_{x_0}M := \{\dot{x}(0) \mid W \subseteq \mathbb{R} \text{ offen, } x : W \rightarrow \mathbb{R}^n : \\ 0 \in W, x(0) = x_0, x(t) \in M, \forall t \in W, x \text{ differenzierbar in } 0\}$$

Wir nennen die Elemente von $T_{x_0}M$ Tangentialvektoren an M in Punkt x_0 .

Der Tangentialraum $T_{x_0}M$ an eine C^1 -Untermannigfaltigkeit M im Punkt x_0 ist die Menge aller Geschwindigkeitsvektoren $\dot{x}(0)$ von glatten Kurven $x(t)$, die in x_0 beginnen und für kleine t vollständig auf M liegen.

Satz 9.6.1 Charakterisierung des Tangentialraumes [Ziltener, 2024]

- (i) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $x_0, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$ so, dass

$$M \cap U = \text{gr}(f) = \{(y, f(y)) \mid y \in V\}.$$

Wir bezeichnen die erste Komponente von $x_0 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ mit y_0 . Es gilt

$$T_{x_0}M = \text{gr}(Df(y_0)).$$

- (ii) Seien $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $y_0 \in V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\psi(y_0) = x_0, \quad \psi(V) = M \cap U.$$

und ψ im Punkt y_0 eine Immersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0}M = \text{im}(D\psi(y_0)).$$

(iii) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{p=n-d}$ so, dass

$$M \cap U = g^{-1}(g(x_0)).$$

und g im Punkt x_0 eine Submersion ist. Dann gilt

$$T_{x_0}M = \ker(Dg(x_0)) = Dg(x_0)^{-1}(0).$$

Dieses Theorem bietet drei verschiedene Wege, den Tangentialraum $T_{x_0}M$ zu bestimmen – das ist die Menge aller erlaubten Richtungen, in die man sich auf der Mannigfaltigkeit M am Punkt x_0 bewegen kann.

Wenn M als Graph beschrieben wird: Ist die Mannigfaltigkeit M lokal der Graph einer Funktion f , so ist ihr Tangentialraum $T_{x_0}M$ der Graph der Ableitung $Df(y_0)$ von f . Das bedeutet, die Tangentialebene ist die beste lineare Annäherung des Graphen an diesem Punkt.

Wenn M durch eine Parametrisierung gegeben ist: Wird M lokal durch eine Parametrisierung ψ beschrieben, die eine Immersion ist, dann ist der Tangentialraum $T_{x_0}M$ das Bild (der Wertebereich) der Ableitung $D\psi(y_0)$. Der Tangentialraum wird also von den "Geschwindigkeitsvektoren" der Parametrisierung aufgespannt.

Wenn M als Niveaumenge beschrieben wird: Ist M lokal eine Niveaumenge einer Funktion g , die eine Submersion ist, so ist der Tangentialraum $T_{x_0}M$ der Kern (Nullraum) der Ableitung $Dg(x_0)$. Das bedeutet, die Vektoren im Tangentialraum stehen senkrecht zu den Gradientenvektoren der Funktion g .

9.7 Tangentialabbildung

Definition 9.7.1: C^k -Eigenschaft, allgemeiner Definitionsbereich [Ziltener, 2024]

Wir sagen, dass f um Punkt x_0 C^k ist genau dann, wenn es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und eine Abbildung $F \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ gibt, sodass

$$F = f \text{ auf } S \cap U.$$

Wir sagen, dass f C^k ist genau dann, wenn diese Bedingung für jeden Punkt $x_0 \in S$ erfüllt ist. Wir definieren

$$C^k(S, \mathbb{R}^p) := \{C^k\text{-Abbildung von } S \text{ nach } \mathbb{R}^p\}.$$

Die C^k -Eigenschaft für eine Funktion f auf einem beliebigen Definitionsbereich S wird über eine lokale "Erweiterbarkeit" definiert. Sie besagt, dass f um einen Punkt $x_0 \in S$ C^k ist, wenn es in einer offenen Umgebung von x_0 eine "gewöhnliche" C^k -Funktion F gibt, die auf dem Schnittpunkt mit S genau mit f übereinstimmt. Ist diese Bedingung für jeden Punkt in S erfüllt, so gilt die Funktion f insgesamt als C^k auf S .

Definition 9.7.2: Tangentialabbildung [Ziltener, 2024]

Wir definieren die Tangentialabbildung (oder Ableitung) von f im Punkt x_0 als

$$Df(x_0) := DF(x_0)|_{T_{x_0}M} \rightarrow T_{f(x_0)N},$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_0 und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ eine Fortsetzung von $f|_{M \cap U}$ ist.

Die Tangentialabbildung $Df(x_0)$ ist die Ableitung einer Funktion $f : M \rightarrow N$ an einem Punkt $x_0 \in M$. Sie wird definiert, indem man die Standardableitung $DF(x_0)$ einer lokalen C^1 -Fortsetzung F von f auf einer offenen Umgebung von x_0 betrachtet. Diese Abbildung $DF(x_0)$ wird dann auf den Tangentialraum $T_{x_0}M$ eingeschränkt und bildet Vektoren in den Tangentialraum $T_{f(x_0)}N$ ab.

9.8 kritische Punkte einer Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , Lagrange Multiplikationsregel

Definition 9.8.1: kritischer Punkt [Ziltener, 2024]

Ein Punkt $x_0 \in M$ heisst kritischer (oder stationärer) Punkt für f genau dann, wenn die Tagentialabbildung von f in x_0 verschwindet, d. h.

$$Df(x_0) = 0.$$

Wir schreiben

$$\text{Crit } f := \{\text{kritische Punkte für } f\}.$$

Definition 9.8.2: Lagrangefunktion [Ziltener, 2024]

Wir definieren die Lagrangefunktion für (F, g) als die Funktion

$$L := L_{F,g} : U \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda^T g(x).$$

Die Lagrangefunktion $L(x, \lambda) = F(x) - \lambda^T g(x)$ ist ein mathematisches Werkzeug, das eine Zielfunktion $F(x)$ mit Nebenbedingungen $g(x) = 0$ kombiniert. Sie führt dabei neue Variablen, die Lagrange-Multiplikatoren λ , ein, um die Verletzung der Nebenbedingungen zu "bestrafen". Ihr Hauptzweck ist es, ein eingeschränktes Optimierungsproblem in ein unbeschränktes umzuwandeln, dessen kritische Punkte die Lösungen des ursprünglichen Problems beinhalten können.

Satz 9.8.1 Lagrange-Multiplikationsregel [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass 0 ein regulärer Wert von g ist. Sei $x_0 \in U$. Dann gilt $x_0 \in \text{Crit } f$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$ gibt, sodass $(x_0, \lambda) \in \text{Crit } L$.

Die Lagrange-Multiplikationsregel besagt, dass ein Punkt x_0 genau dann ein kritischer Punkt einer Zielfunktion unter den Nebenbedingungen $g(x) = 0$ ist, wenn es einen Vektor λ von Lagrange-Multiplikatoren gibt, sodass (x_0, λ) ein kritischer Punkt der zugehörigen Lagrangefunktion $L(x, \lambda)$ ist. Diese Äquivalenz ermöglicht es, eingeschränkte Optimierungsprobleme durch das Auffinden der kritischen Punkte der unbeschränkten Lagrangefunktion zu lösen. Die Regel setzt dabei voraus, dass 0 ein regulärer Wert der Nebenbedingungsfunktion g ist, was eine "Wohlgeformtheit" der Nebenbedingungen sicherstellt.

Kapitel 10

Mehrdimensionale
Riemann-integration, Satz von Fubini
über wiederholte Integration,
Jordan-Mass, Substitutionsregel für
mehrdimensionale Integrale

10.1 Riemann-Integral

Definition 10.1.1: eigentliches Riemann-Integral [Ziltener, 2024]

- (i) Ein n -dimensionaler (beschränkter) Quader (oder Rechteck) ist ein Produkt der Form

$$R = \prod_{i=1}^n I_i = I_1 \times \cdots \times I_n.$$

wobei I_1, \dots, I_n beschränkte Intervalle sind. Diese dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein.

- (ii) Wir schreiben die Länge eines Intervalls I als $|I|$. Wir definieren den (n -dimensionalen) Inhalt (oder das (n -dimensionale) Volumen) eines Quaders $R = \prod_{i=1}^n I_i$ als

$$\text{vol}(R) := \text{vol}_n(R) = |R| := \prod_{i=1}^n |I_i| = |I_1| \cdots |I_n|.$$

Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader.

- (iii) Wir nennen $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion genau dann, wenn φ eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von n -dimensionalen Quadern ist.
- (iv) Sei \mathcal{R} eine endliche Kollektion (=Menge) von Quadern, die in R enthalten sind, und $c_q \in \mathbb{R}$ für $Q \in \mathcal{R}$. Wir definieren das Riemann-Integral der Treppenfunktion

$$\varphi := \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q \chi_Q$$

als

$$\int_R \varphi(x) dx := \sum_{Q \in \mathcal{R}} c_Q |Q|.$$

- (v) Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren das untere und das obere Riemann-Integral von f (über R) als

$$\underline{\int}_R f(x) dx := \sup \left\{ \int_R \varphi(x) dx \mid \varphi : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion} \leq f \right\},$$

$$\overline{\int}_R f(x) dx := \inf \left\{ \int_R \psi(x) dx \mid \psi : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion} \geq f \right\}.$$

Wir nennen f eigentlich Riemann-integrierbar (über R) genau dann, wenn

$$\underline{\int}_R f(x) dx \geq \overline{\int}_R f(x) dx.$$

In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von f (über R) als

$$\int_R f(x) dx := \underline{\int}_R f(x) dx.$$

Die obige Definition entspricht der Definition aus Kapitel 6.1 bloss erweitern auf mehreren Dimensionen.

10.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Proposition 10.2.1 Riemann-Integration [Ziltener, 2024]

- (i) (unteres und oberes Integral) Es gilt

$$\int_{\underline{R}} f(x) dx \leq \int_{\overline{R}} f(x) dx.$$

- (ii) (Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit) f ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : R \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\varphi \leq f \leq \psi,$$

$$\int_R \psi(x) dx - \int_R \varphi(x) dx < \epsilon.$$

- (iii) (Treppenfunktion integrierbar) jedes Treppenfunktion $f = \varphi$ ist Riemann-integrierbar. Ihre Riemann-Integral stimmt mit der Definition aus Kapitel 10.1 überein.
- (iv) (stetige Funktion Riemann-integrierbar) Falls R abgeschlossen (und beschränkt) ist und f stetig, dann ist f Riemann-integrierbar.
- (v) (Monotonie) Falls $f \leq g$, dann gilt

$$\int_R f(x) dx \leq \int_R g(x) dx.$$

- (vi) (Linearität) cf und $f + g$ sind Riemann-integrierbar und

$$\int_R cf(x) dx = c \int_R f(x) dx,$$

$$\int_R (f + g)(x) dx = \int_R f(x) dx + \int_R g(x) dx.$$

- (vii) Das Produkt zweier Riemann-integrierbarer Funktionen ist Riemann-integrierbar.
- (viii) (Minimum, Maximum, Absolutbetrag) $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ und $|f|$ sind Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_R f dx \right| \leq \int_R |f| dx.$$

Diese Proposition erweitert den Satz aus Kapitel 6.2 auf mehrdimensionale Räume.

10.3 Satz von Fubini, wiederholte Integration

Satz 10.3.1 Satz von Fubini [Ziltener, 2024]

Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ und $R \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader und $f : Q \times R \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir nehmen an, dass f Riemann-integrierbar ist. Dann sind die Funktionen

$$R \ni z \mapsto \int_{\underline{Q}} f(y, z) dy \in \mathbb{R},$$

$$R \ni z \mapsto \int_Q f(y, z) dy \in \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar, und

$$\int_{Q \times R} f(x) dx = \int_R \int_Q f(y, z) dy dz = \int_R \int_Q f(y, z) dy dz.$$

Der Satz von Fubini besagt, dass das Integral einer Riemann-integrierbaren Funktion über einem Produktbereich (wie $Q \times R$) durch iterierte Integration berechnet werden kann. Hierbei sind die Funktionen, die durch das Fixieren einer Variable entstehen, selbst Riemann-integrierbar. Dies erlaubt es, die Gesamtintegration schrittweise über jede Variable durchzuführen und die Reihenfolge der Integration zu vertauschen, ohne das Ergebnis zu ändern.

10.4 Jordan-Mass

Definition 10.4.1: Jordan-Mass [Ziltener, 2024]

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Jordan-messbar (oder Jordan-Bereich) genau dann, wenn 1_S Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir ihr Jordan-Mass (oder ihren Jordan-Inhalt) als

$$\text{vol}(S) := \text{vol}_n(S) := |S| := \int_S 1 dx.$$

In einfachen Worten gesagt ist das Jordan-Mass eine sehr formelle Art das Volumen, die Fläche oder die Länge zu berechnen.

10.5 Substitutionsregel, Integral einer drehinvarianten Funktion, Transformationssatz für das Volumen

Satz 10.5.1 Substitutionsregel für ein mehrdimensionales Integral [Ziltener, 2024]

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\psi : V \rightarrow U$ ein C^1 -Diffeomorphismus, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge, sodass $\bar{S} \subseteq U$ und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (i) f ist Riemann-integrierbar (über S) genau dann, wenn

$$(f \circ \psi)|\det D\psi| : \psi^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar ist.

- (ii) In diesem Fall gilt, dass

$$\int_S f(x) dx = \int_{\psi^{-1}(S)} (f \circ \psi)(y) |\det D\psi(y)| dy.$$

In manchen Fällen ist es einfacher, eine Funktion über einen anderen Koordinatenraum zu integrieren. (kartesisch, polar, etc.) Die Substitutionsregel für ein mehrdimensionales Integral erlaubt dies. Man muss jedoch beachten, dass man die Jakobische Determinante (Skalierungsfaktor) miteinbezieht, da beim Wechsel des Koordinatenraumes die Funktion gestreckt bzw. gestaucht wird.

Korollar 10.5.1 Integral einer drehinvarianten Funktion [Ziltener, 2024]

Es gilt, dass

$$\int_{\bar{B}_{r_0}^2} f(x) dx = 2\pi \int_0^{r_0} \tilde{f}(r) r dr..$$

Dieses Korollar vereinfacht die Berechnung von Integralen drehinvarianter Funktionen über einer Kreisscheibe (einem Kreisbereich in \mathbb{R}^2). Da der Funktionswert solcher Funktionen nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, kann man sie als reine Funktion des Radius $\tilde{f}(r)$ darstellen. Das zweidimensionale Integral über die Kreisscheibe wird dadurch in ein einfaches eindimensionales Integral über den Radius umgewandelt, wobei der Faktor 2π (für den vollen Winkelbereich) und der Jacobi-Term r (für die Flächenskalierung) berücksichtigt werden.

Korollar 10.5.2 Transformationssatz für das Volumen [Ziltener, 2024]

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\psi : V \rightarrow U$ ein C^1 -Diffeomorphismus und A eine Jordan-messbare Menge, sodass $\bar{A} \subseteq V$. Dann ist $\psi(A)$ Jordan-messbar mit

$$|\psi(A)| = \int_A |\det(D\psi(y))| dy.$$

Dieser Transformationssatz ermöglicht die Berechnung des Volumens (oder Flächeninhalts) einer durch eine Diffeomorphismus-Abbildung ψ transformierten Menge $\psi(A)$. Anstatt das Integral über die potenziell komplexe transformierte Menge $\psi(A)$ zu bilden, berechnet man das Volumen, indem man den Betrag der Jacobi-Determinante von ψ über die ursprüngliche, oft einfachere Menge A integriert. Die Jacobi-Determinante fungiert dabei als lokaler Skalierungsfaktor, der die Volumenänderung durch die Transformation korrekt berücksichtigt.

Kapitel 11

Vektorfelder und die Sätze von Green, Stokes und Gauss

11.1 Kurvenintegral, Orientierung, C^k -Gebiet

Definition 11.1.1: Kurvenintegral einer Funktion [Ziltener, 2024]

Eine (eingebettete) C^k -Kurve in \mathbb{R}^n ist eine C^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n der Dimension 1.

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^1 -Kurve.

Es gilt:

- (i) Es gibt ein $l \in \mathbb{N}_0$ und für jedes $j = 1, \dots, l$ ein kompaktes Intervall I_j positiver Länge und eine Immersion $x_j \in C^1(I_j, \mathbb{R}^n)$, sodass

$$\bigcup_{j=1}^l x_j(I_j) = C$$

und so, dass die Abbildung

$$\bigcup_j \{j\} \times \text{Int } I_j \ni (j, t) \mapsto x_j(t) \in C$$

injektiv ist. (Dabei bezeichnet $\text{Int } I_j$ das Innere von I_j)

Seien jetzt $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und l und $(I_j, x_j)_{j=1, \dots, l}$. Wir definieren

$$I(f, (I_j, x_j)_j) := \sum_{j=1}^l \int_{I_j} f \circ x_j(t) \|\dot{x}_j(t)\| dt.$$

- (ii) Die Zahl $I(f, (I_j, x_j)_j)$ hängt nicht von $(I_j, x_j)_j$ ab.

Wir definieren das (Kurven-)Integral von f über C als

$$\int_C f ds := I(f, (I_j, x_j)_j).$$

Ein Kurvenintegral summiert die Werte einer stetigen Funktion entlang eines glatten Pfades (einer C^1 -Kurve) im Raum. Dazu wird die Kurve in parametrisierbare Abschnitte unterteilt, und die Funktion wird entlang jedes Abschnitts über seine Bogenlänge integriert. Der resultierende Gesamtwert ist dabei unabhängig davon, wie die Kurve in Abschnitte zerlegt oder wie diese parametrisiert werden.

Definition 11.1.2: Einheitstangentialvektorfeld [Ziltener, 2024]

Ein Einheitstangentialvektorfeld längs C (oder eine Orientierung von C) ist eine stetige Abbildung $T : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass

$$T(x) \in T_x C, \|T(x)\| = 1, \quad \forall x \in C.$$

Ein Einheitstangentialvektorfeld längs einer Kurve C ist eine stetige Zuordnung, die jedem Punkt x auf der Kurve einen Vektor $T(x)$ zuweist. Dieser Vektor $T(x)$ zeigt dabei stets tangential zur Kurve und hat eine Länge von genau Eins. Durch diese konsistente Zuweisung eines Richtungsvektors definiert das Feld eine eindeutige Orientierung für die Kurve.

Definition 11.1.3: Kurvenintegral eines Vektorfeldes [Ziltener, 2024]

Wir nehmen an, dass C kompakt ist. Wir definieren das (Kurven-)Integral (oder das Ringintegral oder die Zirkulation) von X über C bezüglich T als

$$\int_{C,T} X \cdot ds := \int_C X \cdot T ds,$$

wobei die rechte Seite das Kurvenintegral der Funktion $X \cdot T : C \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet.

Das Kurvenintegral eines Vektorfeldes summiert den Einfluss eines Vektorfeldes X entlang einer bestimmten Kurve C . Es berechnet, wie viel des Feldes X an jedem Punkt in Richtung der Kurve (T) wirkt (dies ist das Skalarprodukt $X \cdot T$). Dieser gerichtete Anteil wird dann über die gesamte Länge der Kurve aufsummiert, um den Gesamteffekt des Feldes entlang des Weges zu erhalten.

Definition 11.1.4: C^k -Gebiet [Ziltener, 2024]

Ein (n -dimensionales) C^k -Gebiet ist eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass es für jeden Punkt $x_0 \in \partial U$ eine offene Umgebung U' von x_0 und eine C^k -Submersion $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$g(x_0) = 0, \quad U \cap U' = g^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) < 0\}.$$

Ein C^k -Gebiet ist eine offene Menge, deren Rand eine bestimmte Glattheitsstufe k aufweist. Dies bedeutet, dass man den Rand lokal durch eine C^k -glatte Funktion g beschreiben kann, wobei $g(x) = 0$ auf dem Rand, $g(x) < 0$ innerhalb des Gebiets und $g(x) > 0$ ausserhalb gilt. Die "Submersion"-Bedingung stellt dabei sicher, dass der Rand nirgendwo flach ist und eine klare Trennung zwischen innen und aussen ermöglicht.

Definition 11.1.5: positive Orientierung des Randes [Ziltener, 2024]

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Gebiet. Wir definieren die positive Orientierung von ∂U (bezüglich U),

$$T : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

wie folgt. Seien $x_0 \in \partial U$ und U', g wie in der obigen Definition. Wir definieren $T(x_0) \in T_{x_0} \partial U$ als den eindeutigen Vektor der Länge 1, sodass das (geordnete) Paar $(\nabla g(x_0), T(x_0))$ eine positive Basis von \mathbb{R}^2 ist.

Einfach gesagt ist die positive Orientierung des Randes, wenn man im Gegenuhrzeigersinn entlang des Randes einer Menge geht.

11.2 Satz von Green

Satz 11.2.1 Green [Ziltener, 2024]

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes C^1 -Gebiet und X ein C^1 -Vektorfeld auf \bar{U} . Dann ist das Integral der Rotation von X über U gleich dem Integral von X über den Rand von U , d. h.

$$\int_U \operatorname{rot} X dx = \int_{\partial U, T} X \cdot ds = \int_{\partial U} X \cdot T ds.$$

wobei T die positive Orientierung von ∂U ist.

Was sagt dieser Satz aus. Dieser Satz sagt aus, dass wenn ein Vektorfeld eine Rotation hat, so muss man nur die Rotation am Rand des Vektorfeldes betrachten. Die Rotation am Rand des Vektorfeldes ist die resultierende Rotation des Vektorfeldes.

11.3 Untermannigfaltigkeit mit Rand und Koorientierung einer Hyperfläche

Definition 11.3.1: Parametrisierung, Untermannigfaltigkeit mit Rand [Ziltener, 2024]

Eine lokale innere C^k -Parametrisierung von M (der Dimension d) ist ein Paar (V, ψ) , wobei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge U von \mathbb{R}^n mit $\psi(V) = M \cap U$ gibt. Eine lokale C^k -Randparametrisierung von M ist ein Paar (V, ψ) , wobei

$$V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^d := \mathbb{R}^{d-1} \times [0, \infty).$$

eine (relativ) offene Teilmenge ist und $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^k -Einbettung ist, sodass es eine offene Teilmenge U von \mathbb{R}^n mit $\psi(V) = M \cap U$ gibt. Eine lokale C^k -Parametrisierung von M ist eine lokale innere oder Randparametrisierung von M der Klasse C^k .

Wir nennen M eine C^k -Untermannigfaltigkeit der Dimension D mit Rand genau dann, wenn es für jeden Punkt $x_0 \in M$ eine lokale C^k -Parametrisierung (V, ψ) mit $x_0 \in \psi(V)$ gibt. Sie M eine solche Untermannigfaltigkeit. Wir definieren den intrinsischen Rand von M als die Menge

$$\partial M := \bigcup \{ \psi(V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})) \mid (V, \psi) \text{ lokale } C^k \text{ Randparametrisierung von } M \}.$$

Eine C^k -Untermannigfaltigkeit mit Rand ist eine glatte geometrische Form, bei der jeder Punkt lokal entweder wie ein offenes Stück des \mathbb{R}^d oder wie ein offenes Stück eines \mathbb{R}^d mit einem geraden Rand aussieht. Diese lokalen Ansichten werden durch Parametrisierungen beschrieben: Innere Parametrisierungen für Punkte fernab des Randes und Randparametrisierungen für Punkte, die tatsächlich auf dem Rand der Form liegen. Der intrinsische Rand der Mannigfaltigkeit (∂M) ist dann die Menge aller Punkte, die diesen "geraden Rändern" der lokalen Randparametrisierungen entsprechen.

Definition 11.3.2: parametrisierte Untermannigfaltigkeit [Ziltener, 2024]

Eine (globale) C^k -Parametrisierung von M ist ein Paar (V, ψ) , wobei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes offenes C^k -Gebiet ist und $\psi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^k -Einbettung mit Bild M ist. Wir nennen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte (global) parametrisierte C^k -Untermannigfaltigkeit der Dimension d mit Rand genau dann, wenn es eine globale C^k -Parametrisierung von M gibt.

Eine globale C^k -Parametrisierung ist eine einzelne, glatte Abbildung, die ein beschränktes Stück des \mathbb{R}^d (mitsamt seinem Rand) vollständig und lückenlos auf die gesamte Form M abbildet. Eine kompakte (global) parametrisierte C^k -Untermannigfaltigkeit mit Rand ist demnach eine Form, die sich als Ganzes durch eine solche einzige Master-Karte beschreiben lässt. Dies bedeutet, dass M eine topologisch β -solide, glatte und begrenzte Form ist, die ihren

Rand vollständig enthält und keine globalen Löcher oder Verwindungen wie eine Kugeloberfläche aufweist.

Definition 11.3.3: Einheitsnormalvektorfeld [Ziltener, 2024]

Eine Koorientierung von M (oder ein Einheitsnormalvektorfeld auf M) ist eine Abbildung $\nu \in C(M, \mathbb{R}^n)$, sodass

$$\nu(x) \in T_x M^\perp, \|\nu(x)\| = 1, \forall x \in M.$$

In einfachen Worten gesagt ist das Einheitsnormalvektorfeld ein Vektorfeld, dessen Vektoren senkrecht zur Oberfläche der Menge steht.

Definition 11.3.4: induzierte Orientierung [Ziltener, 2024]

Wir definieren Die durch ν induzierte Orientierung T von $\partial\Sigma$ wie folgt. Seien $x \in \partial\Sigma$ und (V, ψ) eine lokale C^1 -Randparametrisierung von Σ , deren Bild x enthält und die positive Orientierung erfüllt. Wir definieren $y := \psi^{-1}(x) \in V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ und

$$T(x) := \frac{D_1 \psi(y)}{\|d_1 \psi(y)\|} \in \mathbb{R}^3.$$

Diese Definition beschreibt, wie eine gegebene Orientierung ν (Einheitsnormalenvektorfeld) einer Mannigfaltigkeit Σ eine Orientierung für deren Rand $\partial\Sigma$ induziert. An jedem Punkt x auf dem Rand wird dabei ein tangentialer Einheitsvektor $T(x)$ definiert. Dieser Vektor $T(x)$ zeigt entlang des Randes in eine konsistente Richtung, die durch die lokale Randparametrisierung und die Bedingung der positiven Orientierung (also der Abstimmung mit ν) festgelegt wird.

11.4 Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit, Zusammenhang mit dem Kurvenintegral

Definition 11.4.1: Gramsche Matrix [Ziltener, 2024]

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$.

Wir definieren die zu A gehorige gramsche Matrix als die Matrix $A^T A$. Wir definieren die zu A gehorige gramsche Determinante als $\det(A^T A)$, die Determinante der gramschen Matrix.

Definition 11.4.2: Integral über kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand [Ziltener, 2024]

Für jedes $f \in C(M, \mathbb{R})$ definieren wir das Riemann-Integral von f (über M) als

$$\int_M f dA := I(f, \psi_j, S_j),$$

wobei die rechte Seite eine parametrisierbare Untermannigfaltigkeit ist mit einer beliebigen Kollektion $(\psi_j, S_j)_j$. Wir definieren das d -dimensionale Volumen von M als

$$\text{Vol}_d(M) := \int_M 1 dA.$$

Diese Definition erklärt, wie man eine Funktion f über eine allgemeine, gekrümmte Form oder Oberfläche (M) integriert, die auch Ränder haben kann. Die Berechnung (I) erfolgt, indem man die gekrümmte Form M in kleinere Abschnitte zerlegt und diese mithilfe von „Abwicklungsfunktionen“ (ψ_j, S_j) auf flache Bereiche überträgt, wo das Integral unter Berücksichtigung der Krümmung (dA) ausgeführt wird. Das d -dimensionale Volumen von M ist dann einfach das Integral der konstanten Funktion 1 über M .

11.5 Integral über parametrisierbare Untermannigfaltigkeit, zweidimensionaler Fall, Fluss eines Vektorfeldes durch Hyperfläche

Definition 11.5.1: Fluss durch Hyperfläche [Ziltener, 2024]

Wir definieren den Fluss von X durch M bezüglich ν als das Integral

$$\int_{M,\nu} X \cdot d\mathbf{A} := \int_M X \cdot \nu dA,$$

wobei die rechte Seite ein Integral über kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

Der Fluss quantifiziert die Gesamtmenge einer gerichteten Größe (Vektorfeld X), die eine gegebene Oberfläche (M) durchdringt. Er wird berechnet, indem man an jedem Punkt der Oberfläche misst, wie stark das Feld senkrecht zur Oberfläche steht (mithilfe des Normalenvektors ν), und diese Beiträge über die gesamte Fläche summiert. Dies ergibt ein Maß dafür, wie viel Materie oder Einflusstatsächlich die Oberfläche durchquert, und nicht nur an ihr entlangströmt.

11.6 Satz von Stokes

Satz 11.6.1 Stokes [Ziltener, 2024]

Seien $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte C^2 -Fläche, $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Koorientierung. $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von Σ und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt, dass

$$\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times X) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma} (\nabla \times X) \times \nu dA = \int_{\partial\Sigma,T} X \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} X \cdot T ds,$$

wobei T die durch ν induzierte Orientierung von $\partial\Sigma$ ist.

Der Satz von Stokes stellt eine fundamentale Verbindung zwischen einem Oberflächenintegral und einem Linienintegral her. Es besagt, dass die Gesamtmenge an Rotation oder "Wirbelstärke" eines Vektorfeldes, die eine gegebene Oberfläche durchdringt, gleich ist. Dieser Wert entspricht exakt der gesamten "Zirkulation" oder dem "Fluss" desselben Vektorfeldes entlang des Randes dieser Oberfläche.

11.7 Satz von Gauß

Satz 11.7.1 Divergenzsatz von Gauß [Ziltener, 2024]

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -Gebiet und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Integral der Divergenz von X über U gleich dem Fluss von X durch den Rand von U , d. h.

$$\int_U \nabla \cdot X dx = \int_{\partial U,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial U} X \cdot \nu dA,$$

wobei ν die nach aussen weisende Koorientierung von ∂U ist.

Der Divergenzsatz von Gauß verbindet das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein Gebiet mit dem Fluss dieses Feldes durch dessen Rand. Er besagt, dass die gesamte "Erzeugung" oder "Absorption" eines Vektorfeldes innerhalb eines Volumens genau dem Nettofluss des Feldes aus diesem Volumen durch seine Oberfläche entspricht. Anschaulich bedeutet dies, dass die Summe aller lokalen Quellen und Senken im Inneren eines Bereichs dem Gesamtfluss durch dessen äussere Begrenzung entsprechen muss.

Literaturverzeichnis

[Schultheis, 2025] Schultheis, P. (2025). Analysis I PVK Skript.

[The Manim Community Developers, 2024] The Manim Community Developers (2024). Manim - Mathematical Animation Framework.

[Ziltener, 2024] Ziltener, D. F. (2024). Notizen zur Vorlesung Analysis 1 für ITET und RW, Herbstsemester 2024.